LINGUAGGI DEL PRIMO ORDINE

LINGUAGGIO "PURO"

- Connettivi: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
- Variabili: $x, y, z, \dots, x_1, x_2, \dots$
- Quantificatori: $\forall, \exists$
- Simbolo di uguaglianza: $=$

ALTRI SIMBOLI

- SIMBOLI DI COSTANTE $\underline{c}$
- SIMBOLI DI FUNZIONE $\underline{F}$
- SIMBOLI DI RELAZIONE $\underline{R}$

Ad ogni simbolo di funzione e di relazione si associa un numero naturale, detto ARIETÀ.

Es.: linguaggio dei gruppi $\mathcal{L} = \{ \underline{e}, \cdot \}$.

simbolo di costante — simbolo di funzione di arietà 2

Assiomi di gruppo:

- $\forall x\, ((x \cdot \underline{e} = x) \wedge (\underline{e} \cdot x = x))$
- $\forall x\, \exists y\;\; x \cdot y = \underline{e}$
- $\forall x\, \forall y\, \forall z\;\; (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$

Def.: $\mathcal{L}$-TERMINI (e VARIABILE LIBERA in t):

- se x è una variabile, allora x è un termine e $VL(x) = \{x\}$;
  insieme delle variabili libere del termine x
- se $\underline{c} \in \mathcal{L}$ è un simbolo di costante, allora $\underline{c}$ è un termine e $VL(\underline{c}) = \emptyset$;
- se $t_1, \dots, t_n$ sono termini e $\underline{F}$ è un simbolo di funzione di arietà n, allora $\underline{F}(t_1, \dots, t_n)$ è un termine le cui variabili libere sono $\bigcup_{i=1}^{n} VL(t_i)$.

Gli $\mathcal{L}$-termini sono il più piccolo insieme t.c. valgono le tre proprietà scritte sopra.

Es. di $\mathcal{L}_{gruppi}$-termini: $\underline{e} \cdot x$, $(x \cdot y) \cdot z$.

$\mathcal{L}_{\text{teoria insiemi}} = \{\in\}$, es. di termini: solo le variabili.

Oss.: $\exists x\, (\varphi(x) \wedge \forall y\, (\varphi(y) \rightarrow y = x))$, "$\exists! x\, \varphi(x)$".

Es. nella teoria degli insiemi: $\exists! x\, (\forall t\; t \notin x)$, $\emptyset$.

In questi casi si dice che φ definisce univocamente un elemento ed è possibile usare un simbolo metalinguistico per tale elemento nelle formule, convenendo che stiamo scrivendo "abbreviazioni" di vere formule.

Def.: le $\mathcal{L}$-FORMULE (e le loro variabili libere) sono il più piccolo insieme t.c.

- contiene le FORMULE ATOMICHE:
  se t_1, t_2 sono $\mathcal{L}$-termini, allora $(t_1 = t_2)$ è una formula le cui variabili libere sono $VL(t_1) \cup VL(t_2)$;
  se $\underline{R}$ è un simbolo di relazione di arietà n e $t_1, \dots, t_n$ sono termini, allora $\underline{R}(t_1, \dots, t_n)$ è una formula le cui variabili libere sono $\bigcup_{i=1}^{n} VL(t_i)$;
- se φ e ψ sono formule, allora anche $\neg\varphi$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$, $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ sono formule dove $VL(\neg\varphi) = VL(\varphi)$ e $VL(\varphi \underset{\leftrightarrow}{\overset{\wedge}{\vee}} \psi) = VL(\varphi) \cup VL(\psi)$;

Es.: $\mathcal{L} = \{<\}$, $x < y$ è una formula atomica.

- se φ è una formula e la variabile $x \in VL(\varphi)$, allora $(\exists x \varphi)$ e $(\forall x \varphi)$ sono formule le cui variabili libere sono $VL(\varphi) \setminus \{x\}$.

Es.: $\mathcal{L} = \{<\}$, $\forall x \exists y\; x < y$ è una formula senza v.l..

Def.: una formula senza v.l. si dice ENUNCIATO.

Def.: sia $\mathcal{L} = \{c_i \mid i \in I\} \cup \{F_j \mid j \in J\} \cup \{R_k \mid k \in K\}$.

Una $\mathcal{L}$-STRUTTURA $\mathcal{M}$ consiste di:

1. un UNIVERSO M (insieme non vuoto);
2. per ogni simbolo di costante c, un elemento $c^{\mathcal{M}} \in M$ (l'interpretazione del simbolo $\underline{c}$ in $\mathcal{M}$ è una costante di M);
3. per ogni simbolo di funzione F di arietà n, $F^{\mathcal{M}} : M^n \rightarrow M$ è una funzione n-aria;
4. " " " " relazione R " " n, $R^{\mathcal{M}} \subseteq M^n$.

$\mathcal{M} = (M, \{c_i^{\mathcal{M}}\}_{i \in I}, \{F_j^{\mathcal{M}}\}_{j \in J}, \{R_k^{\mathcal{M}}\}_{k \in K})$.

Es.: $\mathcal{L} = \{<\}$. Una $\mathcal{L}$-struttura è $(M, <^{\mathcal{M}})$.

insieme di coppie di M

Voglio attribuire un "significato" in $\mathcal{M}$ ad ogni $\mathcal{L}$-formula.

Problema: non so cosa fare se nella formula ci sono v.l..

Es.: $\mathcal{L} = \{<\}$. $\mathcal{L}$-struttura: $\mathcal{M} = (\mathbb{N}, <_{\mathbb{N}})$. "$x<y$" formula atomica dove x e y sono v.l.. Il suo valore di verità V/F dipenderà da quali elementi dell'universo faccio corrispondere a x e y.

Per attribuire un valore di verità a tutte le $\mathcal{L}$-formule occorre specificare un ASSEGNAMENTO delle variabili, cioè una funzione $\rho : Var \rightarrow M$.

Def.: RELAZIONE di SODDISFAZIONE di TARSKI. Dati φ $\mathcal{L}$-formula, $\mathcal{M}$ $\mathcal{L}$-struttura, $\rho : Var \rightarrow M$ assegnamento, "$\mathcal{M} \models \varphi[\rho]$": φ è vera in $\mathcal{M}$ con l'assegnamento ρ.