- T è insodd. $\iff$ esiste σ enunciato t.c. $T\models\sigma$ e $T\models\neg\sigma \iff$ $\iff$ per ogni enunciato σ, $T\models\sigma$;
- $T,\sigma_1,\dots,\sigma_n \models \tau \iff T\models(\sigma_1\wedge\dots\wedge\sigma_n)\to\tau$;
- $T\models\sigma \iff T\cup\{\neg\sigma\}$ insodd.;
- $T\cup\{\sigma\}\models\tau$ e $T\cup\{\neg\sigma\}\models\tau \Rightarrow T\models\tau$.

$\mathcal{M}$ $\mathcal{L}$-struttura, $Th(\mathcal{M}) := \{\sigma \text{ enunciato} \mid \mathcal{M}\models\sigma\}$.

Def.: $\mathcal{M}\subseteq\mathcal{N}$ SOTTOSTRUTTURA se
- $M\subseteq N$;
- $\underline{c}^{\mathcal{N}} = \underline{c}^{\mathcal{M}}$ per ogni simbolo di cost.;
- per ogni simbolo di funzione $\underline{F}$ di arietà k e per ogni $m_1,\dots,m_k\in M$, $\underline{F}^{\mathcal{N}}(m_1,\dots,m_k) = \underline{F}^{\mathcal{M}}(m_1,\dots,m_k)$;
- " " " " relazione $\underline{R}$ " " ", $\underline{R}^{\mathcal{N}}\cap M^k = \underline{R}^{\mathcal{M}}$.

Data una struttura $\mathcal{M}$, quando un sottoinsieme $X\subseteq M$ è universo di una sottostruttura $\mathcal{N}\subseteq\mathcal{M}$? Se e solo se

(1) $\underline{c}^{\mathcal{M}}\in X$;

(2) $\forall\, \underline{F}$ simbolo di funzione k-aria $\forall x_1,\dots,x_k\in X$, $\underline{F}^{\mathcal{M}}(x_1,\dots,x_k)\in X$.

$\mathcal{M}$ $\mathcal{L}$-strutt., $X\subset M$, la sottostrura generata è la più piccola sottostruttura $\mathcal{N}\subseteq\mathcal{M}$ t.c. $N\supseteq X$.

Def.: $\mathcal{M}\equiv\mathcal{N}$ ELEMENTARMENTE EQUIVALENTI se per ogni enunciato σ, $\mathcal{M}\models\sigma \iff \mathcal{N}\models\sigma$, cioè $Th(\mathcal{M}) = Th(\mathcal{N})$.

⚠ Elementarmente equiv. $\not\Rightarrow$ isomorfe. da definire

Oss.: una teoria sodd. T è completa $\iff$ per ogni $\mathcal{M},\mathcal{N}\models T$ si ha $\mathcal{M}\equiv\mathcal{N}$.

Ha fatto la dim., non avevo voglia di scriverla, dovrebbe essere facile.

ARITMETICA di PEANO (PA)

$\mathcal{L} = \{\underline{0}, S, +, \cdot\}$

"$S: \mathbb{N}\to\mathbb{N}\setminus\{0\}$ bigezione", ma non lo posso dire

(1) $\forall x\; S(x)\neq\underline{0}$

(2) $\forall x\; (x\neq\underline{0}\to\exists y\; S(y)=x)$

(3) $\forall x\forall y\,(S(x)=S(y)\to x=y)$

(4) $\forall x\quad x+\underline{0}=x$

(5) $\forall x\forall y\quad x+S(y)=S(x+y)$

(6) $\forall x\quad x\cdot\underline{0}=\underline{0}$

(7) $\forall x\forall y\quad x\cdot S(y) = x\cdot y + x$

Fino qui, la teoria si chiama aritmetica di Robinson e si denota Q.

Es.: $(\mathbb{N}, 0, \text{“}+1\text{”}, +, \cdot)\models Q$

$(\mathbb{Z}, 0, \text{“}+1\text{”}, +, \cdot)\not\models (1)$

σ: "$\forall x\,\exists y\,(y+y=x \vee y+y+1=x)$",

$\mathbb{N}\models\sigma$, ma $Q\models\sigma$?

$\mathbb{Z}^+[x] = \{P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \in\mathbb{Z}[x] \mid a_n>0, n\geq 1\}\cup\mathbb{N}_0$ è un modello di Q. $\mathbb{Z}^+[x]\models\sigma$? No: $P(x)=x$. Quindi $Q\not\models\sigma$.

(8) INDUZIONE al 1° ordine:

per ogni formula $\varphi(x,y_1,\dots,y_n)$, $\{x,y_1,\dots,y_n\}\in VL(\varphi)$,

$(\varphi(0)\wedge\forall x(\varphi(x)\to\varphi(S(x))))\to\forall x\,\varphi(x)$

$\forall y_1\dots\forall y_n\,[\ \dots$ come sopra, con gli $y_i\,]$

Prop.: (1) $+$ e $\cdot$ sono associative;

(2) " " " " commutative;

(3) proprietà distributiva.

Def.: "$x\leq y$" significa "$\exists z\; x+z=y$".

Prop.: $\leq$ è un ordine totale.

Ex.: le due prop. qui sopra.

Ex.: PA "$\vdash$" σ.