Def.: $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ $\mathcal{L}$-strutt.. $\theta: M \to N$ si dice OMOMORFISMO se

(1) $\theta(\underline{c}^{\mathcal{M}}) = \underline{c}^{\mathcal{N}}$ per ogni simbolo di cost.;

(2) $\theta(F^{\mathcal{M}}(m_1, \dots, m_k)) = F^{\mathcal{N}}(\theta(m_1), \dots, \theta(m_k))$ per ogni F simbolo di funzione k-aria;

(3) $R^{\mathcal{M}}(m_1, \dots, m_k) \Rightarrow R^{\mathcal{N}}(\theta(m_1), \dots, \theta(m_k))$ " " R " " relazione ".

Es.: omomorfismi tra gruppi;
funzioni crescenti tra insiemi ordinati.

Def.: φ formula è POSITIVA se in essa compaiono solo i connettivi $\wedge, \vee$, e il quantificatore $\exists$.

Prop.: se $\theta: \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ omomorfismo, allora per ogni formula positiva φ e per ogni assegnamento $\rho: Var \to M$ $\mathcal{M} \models \varphi[\rho] \Rightarrow \mathcal{N} \models \varphi[\theta \circ \rho]$.

Dim.: vediamo prima che per ogni termine $\theta(t^{\mathcal{M},\rho}) = t^{\mathcal{N},\theta\circ\rho}$:

- se t è una variabile x, $x^{\mathcal{M},\rho} = \rho(x) \Rightarrow \theta(x^{\mathcal{M},\rho}) = (\theta\circ\rho)(x) = x^{\mathcal{N},\theta\circ\rho}$;
- se t è un simbolo di costante $\underline{c}$, $\underline{c}^{\mathcal{M},\rho} = \underline{c}^{\mathcal{M}} \Rightarrow \theta(\underline{c}^{\mathcal{M},\rho}) = \theta(\underline{c}^{\mathcal{M}}) = \underline{c}^{\mathcal{N}} = \underline{c}^{\mathcal{N},\theta\circ\rho}$;
- se t è $F(t_1, \dots, t_k)$, $(F(t_1, \dots, t_k))^{\mathcal{M},\rho} = F^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M},\rho}, \dots, t_k^{\mathcal{M},\rho}) \Rightarrow$
$\theta\left((F(t_1,\dots,t_k))^{\mathcal{M},\rho}\right) = \theta\left(F^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M},\rho}, \dots, t_k^{\mathcal{M},\rho})\right) =$
$= F^{\mathcal{N}}(\theta(t_1^{\mathcal{M},\rho}), \dots, \theta(t_k^{\mathcal{M},\rho})) = F^{\mathcal{N}}(t_1^{\mathcal{N},\theta\circ\rho}, \dots, t_k^{\mathcal{N},\theta\circ\rho}) =$
$= (F(t_1, \dots, t_k))^{\mathcal{N},\theta\circ\rho}$.

Per induzione sulla costruzione della formula φ:

- φ atomica
  - "$t = s$", $\mathcal{M} \models$ "$t=s$"$[\rho] \iff t^{\mathcal{M},\rho} = s^{\mathcal{M},\rho} \Rightarrow$
  $\Rightarrow t^{\mathcal{N},\theta\circ\rho} = \theta(t^{\mathcal{M},\rho}) = \theta(s^{\mathcal{M},\rho}) = s^{\mathcal{N},\theta\circ\rho} \iff$
  $\iff \mathcal{N} \models$ "$s = t$"$[\theta\circ\rho]$;
  - $\mathcal{M} \models R[t_1, \dots, t_k][\rho] \iff R^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M},\rho}, \dots, t_k^{\mathcal{M},\rho}) \Rightarrow$
  $\Rightarrow R^{\mathcal{N}}(\theta(t_1^{\mathcal{M},\rho}), \dots, \theta(t_k^{\mathcal{M},\rho}))$ che è uguale a
  $R^{\mathcal{N}}(t_1^{\mathcal{N},\theta\circ\rho}, \dots, t_k^{\mathcal{N},\theta\circ\rho}) \Rightarrow \mathcal{N} \models R(t_1, \dots, t_k)[\theta\circ\rho]$;
- $\mathcal{M} \models \varphi \wedge \psi[\rho] \iff \mathcal{M} \models \varphi[\rho]$ e $\mathcal{M} \models \psi[\rho] \overset{\text{ip. induttiva}}{\Longrightarrow}$
$\Rightarrow \mathcal{N} \models \varphi[\theta\circ\rho]$ e $\mathcal{N} \models \psi[\theta\circ\rho] \iff \mathcal{N} \models \varphi\wedge\psi[\theta\circ\rho]$,
analogo con $\vee$;
- $\mathcal{M} \models \exists x \varphi(x)[\rho]$, cioè esiste $m \in M$ t.c. $\mathcal{M} \models \varphi[\rho(m/x)] \Rightarrow$
ip. induttiva $\Rightarrow \mathcal{N} \models \varphi[\theta(\rho(m/x))]$, $\theta(\rho(m/x)) = (\theta\circ\rho)(\theta(m)/x) \Rightarrow$
$\Rightarrow \mathcal{N} \models \varphi[(\theta\circ\rho)(\theta(m)/x)] \Rightarrow \mathcal{N} \models \exists x \varphi[\theta\circ\rho]$. $\square$

Def.: $\theta: \mathcal{M} \cong \mathcal{N}$ è un ISOMORFISMO se θ è un omomorfismo biunivoco t.c. θ^{-1} è un omomorfismo.

Se $\theta: \mathcal{M} \cong \mathcal{N}$ allora $R^{\mathcal{M}}(m_1, \dots, m_k) \iff R^{\mathcal{N}}(\theta(m_1), \dots, \theta(m_k))$.

Prop.: se $\mathcal{M} \cong \mathcal{N}$, allora per ogni enunciato σ $\mathcal{M} \models \sigma \iff \mathcal{N} \models \sigma$.

Dim.: ex.. Hint: θ iso., dimostrare che per ogni formula φ e per ogni assegnamento ρ, $\mathcal{M} \models \varphi[\rho] \iff \mathcal{N} \models \varphi[\theta\circ\rho]$. $\square$

$\mathcal{M} \cong \mathcal{N} \Rightarrow \mathcal{M} \equiv \mathcal{N} \not\Rightarrow \mathcal{M} \cong \mathcal{N}$.

Def.: $\theta: \mathcal{M} \prec \mathcal{N}$ è una IMMERSIONE ELEMENTARE se per ogni formula φ e per ogni assegnamento $\rho: Var \to M$
$\mathcal{M} \models \varphi[\rho] \iff \mathcal{N} \models \varphi[\theta\circ\rho]$ (quindi $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$).

Def.: $\mathcal{M} \precsim \mathcal{N}$ SOTTOSTRUTTURA ELEMENTARE se $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$ e l'inclusione $i: \mathcal{M} \prec \mathcal{N}$ è immersione elementare.

Es.: $(\mathbb{Z}, 0, 1, +, \cdot) \subset (\mathbb{Q}, 0, 1, +, \cdot)$, $\mathbb{Z} \not\models$ "$\exists x\ x+x=1$", $\mathbb{Q} \models$ "$\exists x\ x+x=1$".

$\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$, $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N} \not\Rightarrow \mathcal{M} \precsim \mathcal{N}$. Es.: $\mathcal{M} = (2\cdot\mathbb{Z}, <)$, $\mathcal{N} = (\mathbb{Z}, <)$,
$\varphi(z_1, z_2)$: "$\exists x\ z_1 < x < z_2$", $\mathcal{N} \models \varphi(z_1, z_2)[\underset{i\circ\rho}{\rho}]$, $\mathcal{M} \not\models \varphi(z_1, z_2)[\rho]$ dove ρ è t.c. $\rho(z_1) = 0$ e $\rho(z_2) = 2$.

Es.: $(\mathbb{Q}, <) \equiv (\mathbb{Q} + \mathbb{Q}, <)$, $(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}, <) \equiv (\mathbb{Z}, <)$; $(\mathbb{Z}+\mathbb{Z}, <) \cong (\mathbb{Z}, <)$?

Teo. (Lowenheim-Skolem): $\mathcal{B}$ $\mathcal{L}$-strutt., $X \subseteq B$. Allora esiste $\mathcal{A} \precsim \mathcal{B}$ t.c. (1) $X \subseteq A$; (2) $|A| \leq \max\{|X|, |\mathcal{L}|, \aleph_0\}$
($\|\mathcal{L}\| = \max\{|\mathcal{L}|, \aleph_0\}$ è la cardinalità delle $\mathcal{L}$-formule).

Conseguenza: se κ fortemente inaccessibile, $V_\kappa \models ZFC$; allora esiste un modello di ZFC con $|\mathcal{P}(\omega)| \leq \aleph_0$.