Teo. (CRITERIO di TARSKI-VAUGHT): siano $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$. Allora $\mathcal{M} \preccurlyeq \mathcal{N} \iff$
$\iff$ (*) per ogni assegnamento $\rho : Var \to M$, se $\mathcal{N} \models \exists x \varphi(x)[\rho]$ allora esiste $m \in M$ t.c. $\mathcal{N} \models \varphi(x)[\rho(m/x)]$.

Dim.: ($\Rightarrow$) ovvia dalle def..

($\Leftarrow$) Per induzione sulla costruzione delle formule.

Prendiamo $\rho : Var \to M$. Ricordiamo che, per ogni termine t, $t^{\mathcal{M},\rho} = t^{\mathcal{N},\rho}$, $\mathcal{M} \models \underline{R}(t_1, \dots, t_n)[\rho] \iff (t_1^{\mathcal{M},\rho}, \dots, t_n^{\mathcal{M},\rho}) \in \underline{R}^{\mathcal{M}}$,
$(t_1^{\mathcal{N},\rho}, \dots, t_n^{\mathcal{N},\rho}) \in \underline{R}^{\mathcal{M}} = \underline{R}^{\mathcal{N}} \cap M^n \subseteq \underline{R}^{\mathcal{N}} \Rightarrow \mathcal{N} \models \underline{R}(t_1, \dots, t_n)$.

$\neg$: $\mathcal{M} \models \neg\varphi[\rho] \iff \mathcal{M} \not\models \varphi[\rho] \iff \mathcal{N} \not\models \varphi[\rho] \iff \mathcal{N} \models \neg\varphi[\rho]$.

Gli altri connettivi sono facili e si fanno in modo analogo.

$\exists$: $\mathcal{M} \models \exists x \varphi(x)[\rho] \Rightarrow \mathcal{N} \models \exists x \varphi(x)[\rho]$ è ovvio.
si usa anche l'ipotesi induttiva

$\mathcal{N} \models \exists x \varphi(x)[\rho] \Rightarrow \mathcal{M} \models \dots$: si usa l'ipotesi del teorema.

$\forall$: $\forall \equiv \neg\exists\neg$. $\square$

Dim. (di LS): "funzioni di Skolem".

Sia $\varphi(x, y_1, \dots, y_n)$ una formula dove $\{x, y_1, \dots, y_n\} = VL(\varphi)$.
$f_{\varphi,x} : B^n \to B$ è funzione di Skolem per φ rispetto a x se
$\mathcal{B} \models \exists x \varphi(x, y_1, \dots, y_n)[b_1, \dots, b_n] \Rightarrow \mathcal{B} \models \varphi(x, y_1, \dots, y_n)[f_{\varphi,x}(b_1, \dots, b_n), b_1, \dots, b_n]$
(è coinvolto l'assioma di scelta).

Prendo $\mathcal{F}$ famiglia di Skolem che contiene esattamente una funzione di Skolem $f_{\varphi,x}$ per ogni formula $\varphi(x, y_1, \dots, y_n)$; se $n = 0$, pongo $f_{\varphi,x} : B \to B$ cost. di valore $\tilde{b}$ t.c. $\mathcal{M} \models \varphi(x)[\tilde{b}]$.

$$\begin{cases} X_1 = X \\ X_{n+1} = X_n \cup \{ f(b_1, \dots, b_k) \mid f \in \mathcal{F}, b_1, \dots, b_k \in X_n \}. \end{cases}$$

$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$ funziona (fare le verifiche!). $\square$

Sono quelle che ti aspetti, si usa il criterio di TV

Es.: se ZFC ha un modello allora $\exists \mathcal{M} \models ZFC$ numerabile, ma comunque $\mathcal{M} \models$ "$|\omega| < |\mathcal{P}(\omega)|$";
esistono campi ordinati numerabili $(\mathbb{F}, 0, 1, +, \cdot, <) \preccurlyeq (\mathbb{R}, 0, 1, +, \cdot, <)$.

DLO (ordini densi senza estremi), $\mathcal{L} = \{<\}$ è completa, quindi se $\mathcal{M} \models DLO$ e $\mathcal{N} \models DLO$ allora $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$. Es.: $(\mathbb{Q}, <) \equiv (\mathbb{R}, <) \equiv (\mathbb{R} \setminus \{0\}, <)$.

Teo. (LS verso l'alto): sia T una teoria che ammette un modello infinito. Allora per ogni cardinale $\kappa \geq \|\mathcal{L}\|$ allora $\exists \mathcal{M} \models T$ t.c. $|M| = \kappa$.