Teo. (compattezza semantica): se per ogni sottoinsieme finito $T_0 \subseteq T$ esiste un modello $\mathcal{M}_0 \models T_0$, allora esiste un modello $\mathcal{M} \models T$.

Dim.: poi. $\square$

Dim. (di LS verso l'alto): sia $\mathcal{L}^* = \mathcal{L} \cup \{ \underset{\substack{\downarrow \\ \text{nuovi simboli} \\ \text{di costante}}}{\underline{c}_\alpha} \mid \alpha \in \kappa \}$, $T^* = T \cup \{ \text{“}\underline{c}_\alpha \neq \underline{c}_\beta\text{”} \mid \alpha \neq \beta \}$.

Se $T_0 \subseteq T^*$ finito, allora esistono $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ t.c. T_0 contiene solo enunciati nel linguaggio $\mathcal{L} \cup \{ \underline{c}_{\alpha_i} \mid i = 1, \dots, k \}$. In altri termini, $T_0 \subseteq T \cup \{ \text{“}\underline{c}_{\alpha_i} \neq \underline{c}_{\alpha_j}\text{”} \mid i \neq j \}$. Prendo $\mathcal{A} \models T$ modello infinito e lo estendo a una $\mathcal{L}^*$-struttura $\mathcal{A}_0$ prendendo $a_1, \dots, a_k$ elementi distinti di A e interpreto $\underline{c}_{\alpha_i}^{\mathcal{A}} = a_i$ e $\underline{c}_\alpha^{\mathcal{A}} =$ non importa se $\alpha < \kappa$ diverso da $\alpha_1, \dots, \alpha_k$. In questo modo $\mathcal{A}_0 \models T_0$. Quindi posso applicare compattezza e ottenere un modello $\mathcal{B} \models T^*$. Chiaramente $\{ \underline{c}_\alpha^{\mathcal{B}} \mid \alpha < \kappa \} \subseteq B$ ha cardinalità κ.

Dunque $|B| \geq \kappa$ e si usa LS. $\square$

Es.: $(\mathbb{N}, S, 0) \models PA$. Per Tarski (LS verso l'alto), esistono modelli $\mathcal{M} \models PA$ con $|\mathcal{M}| = \kappa$ per ogni cardinale κ infinito.

$\mathcal{L}^* = \mathcal{L} \cup \{\underline{c}\}$, $T^* = PA \cup \{ \underline{c} \neq 0, \underline{c} \neq S(0), \underline{c} \neq S(S(0)), \dots \}$.

Si può “estendere” la $\mathcal{L}_{PA}$-struttura $(\mathbb{N}, S, 0)$ in modo da farla diventare un modello di ogni fissato $T_0 \subseteq T^*$ finito.

Se $T_0 \subseteq T^*$ finito, esiste n t.c. $T_0 \subseteq PA \cup \{ \underline{c} \neq 0, \underline{c} \neq S(0), \dots, \underline{c} \neq \overbrace{S \dots S}^{n}(0) \}$.

Interpreto $\underline{c}$ con l'elemento $n+1$. Per compattezza esiste un modello $\mathcal{A} \models T^*$ e per LS esiste $\mathcal{N} \preccurlyeq \mathcal{A}$ t.c. $|\mathcal{N}| = \aleph_0$.

Def.: in PA, $x < y \iff \exists z \neq 0$ t.c. $x + z = y$.

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \forall x (x \neq 0 \wedge x \neq \tilde{1} \wedge \dots \wedge x \neq \tilde{n}) \to x > \tilde{n}; \\ \bullet\ \forall x \forall y\ \ y > x \to y \geq S(x). \end{array}\right\} \text{ex.}$$

Che struttura d'ordine ha $\mathcal{N} \models PA$ nonstandard t.c. $|\mathcal{N}| = \aleph_0$?

$\mathcal{N} \not\cong (\mathbb{N}, 0, S)$. Es.: “$\mathbb{N} + \mathbb{Z}$”. $\ulcorner$Ex.: in PA, $\forall x\ \ x \neq S(x)$.$\lrcorner$

↳ nel senso che c'è una copia di $\mathbb{Z}$ intorno a $\underline{c}$, ma in realtà ci sono tanti $\mathbb{Z}$

- In ogni modello $\mathcal{M} \models PA$ c'è un segmento iniziale che è una copia di $\mathbb{N}$, cioè $\{ \underline{0}^{\mathcal{M}}, S(\underline{0})^{\mathcal{M}}, S(S(\underline{0}))^{\mathcal{M}}, \dots \}$. In altre parole, gli elementi “non standard” sono “infiniti”.
- Attorno ad ogni c infinito c'è una copia di $\mathbb{Z}$.

Oss.: $\mathcal{N}$ non è ben ordinato mentre $\mathbb{N}$ lo è. Se $\psi : \mathcal{N} \xrightarrow{\cong} \mathbb{N}$, allora sarebbe iso. d'ordine, assurdo.

$\xi \sim \eta \iff |\xi - \eta| \in \mathbb{N}$, $\mathcal{N}_\infty / \sim$ non ha max né min ed è denso $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ è isomorfo a $\mathbb{Q}$. Allora $\mathrm{ot}(\mathcal{N}) = \omega + (\omega^* + \omega) \cdot \eta$ dove $\eta = \mathrm{ot}(\mathbb{Q})$ e ω^* e l'ordine inverso di ω.

$\mathcal{N}$ modello nonstandard. $\mathbb{N} \subseteq \mathcal{N}$ non è definibile, cioè non esistono formule $\varphi(x)$ t.c. $\{ \xi \in \mathcal{N} \mid \mathcal{N} \models \varphi(x)[\xi / x] \} = \mathbb{N}$; altrimenti da $\varphi(\underline{0})$ e da $\varphi(\xi) \to \varphi(\xi + 1)$ avrei $\forall x \varphi(x)$, cioè $\mathbb{N} = \mathcal{N}$, assurdo.