Def.: una teoria T si dice κ-CATEGORICA se ammette un unico modello $\mathcal{M} \models T$ di cardinalità κ (a meno di isomorfismi).

Teo.: se T non ha modelli finiti ed è κ-cat. per un cardinale $\kappa \geq \|\mathcal{L}\|$, allora T è completa.

Dim.: per assurdo esistono due modelli $\mathcal{A} \models T \cup \{\sigma\}$, $\mathcal{B} \models T \cup \{\neg\sigma\}$ (cioè $T \not\models \sigma$ e $T \not\models \neg\sigma$) per un opportuno enunciato σ.
Per LST esistono $\mathcal{A}' \models T \cup \{\sigma\}$ e $\mathcal{B}' \models T \cup \{\neg\sigma\}$ t.c. $|A| = |B| = \kappa$. Per ipotesi, $\mathcal{A}' \cong \mathcal{B}'$, assurdo. $\square$

Es.: DLO è $\aleph_0$-cat.. Dal teo., $(\mathbb{Q}, <) \equiv (\mathbb{R}, <)$.

Ex.: l'ipotesi che T non ha modelli finiti è necessaria.

Obbiettivo: data una sequenza di $\mathcal{L}$-strutt. $(\mathcal{M}_i \mid i \in I)$ trovare una struttura $\mathcal{M}_\infty$ che sia "una media" delle $\mathcal{M}_i$.

Idea: fare in modo che $\mathcal{M}_\infty \models \sigma$ quando $\mathcal{M}_i \models \sigma$ frequentemente, cioè se $\mu(\{i \in I \mid \mathcal{M}_i \models \sigma\})$ è "grande",
$\mu : \mathcal{P}(I) \longrightarrow [0,1]$ misura di prob..

Fissato I e $A \subseteq I$, posso sempre trovare un enunciato σ e una sequenza di strutt. t.c. $A = \{i \in I \mid \mathcal{M}_i \models \sigma\}$. Quindi occorre che μ sia definita su tutto $\mathcal{P}(I)$. Notiamo che se $A = \{i \in I \mid \mathcal{M}_i \models \sigma\}$, $A^c = \{i \in I \mid \mathcal{M}_i \models \neg\sigma\}$.

- A e A^c non possono essere entrambi "grandi", e uno di loro deve esserlo;
- se A e B sono "grandi", anche $A \cap B$ dev'esserlo.

Allora "grande" = misura 1.

Cerchiamo $\mu : \mathcal{P}(I) \longrightarrow [0,1]$ m.d.p. t.c. :

(1) per ogni $A \subseteq I$ $\mu(A) = 1$ o $\mu(A^c) = 1$;
(2) $\mu(A) = \mu(B) = 1 \Rightarrow \mu(A \cap B) = 1$ (perché μ m.d.p.);
(3) $B \subseteq A$ e $\mu(B) = 1 \Rightarrow \mu(A) = 1$ (" " ");
(4) $\mu(\{i\}) = 0 \ \forall i \in I$ (I infinito).

Se $I = \mathbb{N}$ e vale la σ-additività, $\mu(\mathbb{N}) = 0$, assurdo.
Assumiamo soltanto la finita additività. Se $\mathbb{N} = A_1 \sqcup \ldots \sqcup A_k$ partizione finita, $\exists!\, i$ t.c. $\mu(A_i) = 1$ e $\mu(A_j) = 0 \ \forall j \neq i$.

Def.: una ULTRA-misura è una misura finitamente additiva $\mu : \mathcal{P}(I) \to \{0,1\}$ (non banale se $\mu(\{i\}) = 0$ per ogni $i \in I$).

$\mathcal{U}_\mu = \{A \mid \mu(A) = 1\}$ è una famiglia d'insiemi t.c.

$$\left.\begin{array}{l} (1)\ \emptyset \notin \mathcal{U}_\mu,\ I \in \mathcal{U}_\mu; \\ (2)\ A, B \in \mathcal{U}_\mu \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{U}_\mu; \\ (3)\ B \supseteq A,\ A \in \mathcal{U}_\mu \Rightarrow B \in \mathcal{U}_\mu; \end{array}\right\} \text{proprietà di FILTRO}$$
(4) $A \notin \mathcal{U}_\mu \Rightarrow A^c \in \mathcal{U}_\mu$.

Def.: $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(I)$ t.c. valgono (1), (2), (3), (4) è un ULTRAFILTRO, non banale (non principale) se $\{i\} \notin \mathcal{U}$ per ogni $i \in I$.

Prop.: un filtro $\mathcal{U}$ su I è un ultrafiltro $\Longleftrightarrow$ è massimale.

Dim.: ex.. $\square$

Ex.: sia $\mathcal{F}$ un filtro. Allora TFAE:

(a) $\mathcal{F}$ ultrafiltro;
(b) $\mathcal{F}$ massimale;
(c) $\forall\, C = C_1 \sqcup \ldots \sqcup C_n \in \mathcal{F}\ \exists!\, i$ t.c. $C_i \in \mathcal{F}$.

Teo. (Tarski): se $\mathcal{F}$ è un filtro su I, allora esiste $\mathcal{U}$ ultrafiltro t.c. $\mathcal{U} \supseteq \mathcal{F}$.

Dim.: Zorn. $\square$

$\mathcal{U}$ è non banale (non principale) $\Longleftrightarrow \mathcal{U}$ non contiene insiemi finiti.

Quindi $\mathcal{U}$ ultrafiltro non principale $\Longleftrightarrow \mathcal{U} \supseteq \mathcal{F}_r$ (Fréchet, i cofiniti).