ULTRAPRODOTTO di $\mathcal{L}$-strutt..

$(\mathcal{M}_i \mid i \in I)$ $\mathcal{L}$ strutt., $\mathcal{U}$ ultrafiltro su I.

$M_\mathcal{U} := \prod_{i\in I} M_i /_{\approx_\mathcal{U}}$ sarà l'universo, dove $f \approx_\mathcal{U} g \iff \{i \in I \mid f(i) = g(i)\} \in \mathcal{U}$.

Dalle proprietà di filtro, $\approx_\mathcal{U}$ è rel. di equiv..

$\mathcal{M}_\mathcal{U} = (M_\mathcal{U}, \underline{c}_\alpha^{\mathcal{M}_\mathcal{U}}, \underline{F}_\beta^{\mathcal{M}_\mathcal{U}}, \underline{R}_\gamma^{\mathcal{M}_\mathcal{U}})$, $\mathcal{L} = \{\underline{c}_\alpha\}_{\alpha\in A} \cup \{\underline{F}_\beta\}_{\beta\in B} \cup \{\underline{R}_\gamma\}_{\gamma\in C}$.

$\underline{c}_\alpha^{\mathcal{M}_\mathcal{U}} := [(\underline{c}_\alpha^{\mathcal{M}_i} \mid i \in I)]_\mathcal{U} \in M_\mathcal{U}$ $\forall \alpha \in A$;

$\underline{F}_\beta^{\mathcal{M}_\mathcal{U}} : M_\mathcal{U}^k \to M_\mathcal{U}$ (è ben def.) $\forall \beta \in B$;

$([f_1]_\mathcal{U}, \dots, [f_k]_\mathcal{U}) \mapsto [(\underline{F}_\beta^{\mathcal{M}_i}(f_1(i), \dots, f_k(i)) \mid i \in I)]_\mathcal{U}$

$\underline{R}_\gamma^{\mathcal{M}_\mathcal{U}}([f_1]_\mathcal{U}, \dots, [f_k]_\mathcal{U}) \underset{\substack{\downarrow \\ \text{è ben def.}}}{\iff} \{i \in I \mid \underline{R}_\gamma^{\mathcal{M}_i}(f_1(i), \dots, f_k(i))\} \in \mathcal{U}$ $\forall \gamma \in C$.

Es.: $\mathbb{Z}_p$ (campi), $p \in P = \{\text{primi}\}$, $\mathcal{M} = \prod_{p\in P} \mathbb{Z}_p/\mathcal{U}$.

$0 = [(0 \mid p \in P)]_\mathcal{U}$, $1 = [(1 \mid p \in P)]_\mathcal{U}$,

$[(x_p \mid p \in P)]_\mathcal{U} + [(y_p \mid p \in P)]_\mathcal{U} = [(x_p + y_p \mid p \in P)]_\mathcal{U}$.

$\mathcal{M}$ è un campo: fare le verifiche (qua si usa che $\mathcal{U}$ è ultraf.).

Def.: un ULTRAPOTENZA è un ultraprodotto con tutti i "fattori" uguali.

Es.: $\mathbb{R}^\mathbb{N}/\mathcal{U}$, $\mathcal{U}$ ultrafiltro su $\mathbb{N}$. Se usiamo $\mathfrak{F}$ = Fréchet, $\mathbb{R}^\mathbb{N}/\mathfrak{F}$ è un anello parzialmente ordinato, ma non è un campo né totalmente ordinato.

$\mathbb{R}^\mathbb{N}/\mathcal{U}$ è un campo ordinato se $\mathcal{U}$ è un ultrafiltro.

Ex.: $\mathfrak{m}$ ideale massimale di $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ anello $\Rightarrow \mathcal{U}_\mathfrak{m} = \{\underset{\substack{\downarrow \\ \text{zeri di } f}}{Z(f)} \mid f \in \mathfrak{m}\}$ è un ultrafiltro.

$\mathcal{U}$ ultrafiltro su $\mathbb{N} \Rightarrow \{f \in \mathbb{R}^\mathbb{N} \mid Z(f) \in \mathcal{U}\} = \mathfrak{m}_\mathcal{U}$ è un ideale massimale. $\mathcal{U}_{\mathfrak{m}_\mathcal{U}} = \mathcal{U}$, $\mathfrak{m}_{\mathcal{U}_\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}$.

$\mathcal{U}$ ultrafiltro non principale, $\prod_{p\in P} \mathbb{Z}_p/\mathcal{U}$ è un campo infinito di caratteristica 0.

Teo. (Łos): siano $(\mathcal{M}_i \mid i \in I)$ $\mathcal{L}$-strutt. e $\mathcal{U}$ ultrafiltro su I. Per ogni enunciato σ, $\mathcal{M}_\mathcal{U} \models \sigma \iff \{i \in I \mid \mathcal{M}_i \models \sigma\} \in \mathcal{U}$.

Conseguenze:

- se σ enunciato vale per tutti i campi di caratteristica 0, $\exists N$ t.c. $\forall p \geq N$ primo $\mathbb{Z}_p \models \sigma$: PA $\exists p_k \nearrow +\infty$ t.c. $\mathbb{Z}_{p_k} \models \neg\sigma$, $\mathcal{U}$ ultrafiltro non principale su $\mathbb{N}$, allora $\mathbb{F} = \prod_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}_{p_k}/\mathcal{U}$ è un campo di caratteristica 0 t.c. $\mathbb{F} \models \neg\sigma$, assurdo.

Una "proprietà" P è formalizzabile al 1° ordine se esiste una teoria T t.c. $\mathcal{M} \models T \iff \mathcal{M}$ ha la proprietà P.

Ex.: essere "finito" non è del 1° ordine, essere "infinito" sì.