Teo. (Łos): $(\mathcal{M}_i \mid i \in I)$ $\mathcal{L}$-strutt., $\mathcal{U}$ ultraf. su I. Per ogni formula $\varphi(x_1,\dots,x_m)$ dove $VL(\varphi)=\{x_1,\dots,x_m\}$ e per $f_1^{\mathcal{U}},\dots,f_m^{\mathcal{U}} \in M_{\mathcal{U}} = \prod_{i\in I} M_i/\approx_{\mathcal{U}}$ si ha $\mathcal{M}_{\mathcal{U}} \models \varphi(x_1,\dots,x_m)[f_1^{\mathcal{U}},\dots,f_m^{\mathcal{U}}] \iff \{i\in I \mid \mathcal{M}_i \models \varphi(x_1,\dots,x_m)[f_1(i),\dots,f_m(i)]\} \in \mathcal{U}$.

Dim.: se $t(x_1,\dots,x_m)$ è un termine e $f_1^{\mathcal{U}},\dots,f_m^{\mathcal{U}} \in M_{\mathcal{U}}$,

$$t^{\mathcal{M}_{\mathcal{U}}}[f_1^{\mathcal{U}}/x_1,\dots,f_m^{\mathcal{U}}/x_m] \underset{\substack{\downarrow\\ \text{verificare}\\ \text{per ex.}}}{=} [(t^{\mathcal{M}_i}[f_1(i)/x_1,\dots,f_m(i)/x_m] \mid i\in I)]_{\mathcal{U}}.$$

Per induzione sulla costruzione di φ:

- φ è formula atomica
  - "$t_1=t_2$": $\mathcal{M}_{\mathcal{U}} \models$ "$t_1=t_2$"$[f_1^{\mathcal{U}}/x_1,\dots,f_m^{\mathcal{U}}/x_m] \iff$
    $\iff t_1^{\mathcal{M}_{\mathcal{U}}}[f_1^{\mathcal{U}}/x_1,\dots,f_m^{\mathcal{U}}/x_m] = t_2^{\mathcal{M}_{\mathcal{U}}}[f_1^{\mathcal{U}}/x_1,\dots,f_m^{\mathcal{U}}/x_m]$,
    $\overset{\shortparallel}{[(t_1^{\mathcal{M}_i}[f_1(i)/x_1,\dots,f_m(i)/x_i] \mid i\in I)]_{\mathcal{U}}}$ $\quad \overset{\shortparallel}{\text{stesso con } t_2}$
    sono uguali $\iff \{i\in I \mid t_1^{\mathcal{M}_i}[\dots] = t_2^{\mathcal{M}_i}[\dots]\} \in \mathcal{U} \iff$
    $\iff \{i\in I \mid \mathcal{M}_i \models$ "$t_1=t_2$"$[\dots]\} \in \mathcal{U}$;
  - $\underline{R}(t_1,\dots,t_k)$: $\mathcal{M}_{\mathcal{U}} \models \underline{R}(t_1,\dots,t_k)[f_1^{\mathcal{U}},\dots,f_m^{\mathcal{U}}] \iff$
    $\iff (t_1^{\mathcal{M}_{\mathcal{U}}}[\dots],\dots,t_k^{\mathcal{M}_{\mathcal{U}}}[\dots]) \in \underline{R}^{\mathcal{M}_{\mathcal{U}}} \iff$
    $\iff \{i\in I \mid (t_1^{\mathcal{M}_i}[f_1(i),\dots,f_m(i)],\dots,t_k^{\mathcal{M}_i}[\dots]) \in \underline{R}^{\mathcal{M}_i}\} \in \mathcal{U} \iff$
    $\iff \{i\in I \mid \mathcal{M}_i \models \underline{R}(t_1,\dots,t_k)[f_1(i),\dots,f_m(i)]\} \in \mathcal{U}$.
- $\mathcal{M}_{\mathcal{U}} \models \varphi\wedge\psi[\dots] \iff$... vabbè questa è standard, gli altri connettivi sono simili, si usano le proprietà di ultrafiltro;
- quantificatori: pure questi sono facili. $\square$

Dim. (di compattezza): T finit. sodd., $I = \underset{\substack{\downarrow\\ \text{parti finite}}}{\mathrm{Fin}}(T)$. Per ogni $i=\{\sigma_1,\dots,\sigma_m\}\in I$ esiste $\mathcal{M}_i \models \sigma_1\wedge\dots\wedge\sigma_m$.

Vorrei che $\prod_{i\in I} \mathcal{M}_i/\mathcal{U} \models \sigma$ per ogni $\sigma\in T$.

$\Updownarrow \to$ Łos

$$\Lambda_\sigma = \{i\in I \mid \mathcal{M}_i \models \sigma\} \in \mathcal{U}$$
$$\cup\!\shortmid$$
$$\hat{\sigma} = \{i\in I \mid \sigma\in i\}$$

Se $\hat{\sigma}\in\mathcal{U}$ per ogni $\sigma\in T$, $\Lambda_\sigma\in\mathcal{U}$ e avrei la tesi.

Proprietà: sia $\mathcal{X}$ una famiglia di sottoinsiemi di I con la FIP (finite intersection property), cioè le intersezioni finite sono $\neq\emptyset$; allora $\langle\mathcal{X}\rangle = \{A\subseteq I \mid A\supseteq X_1\cap\dots\cap X_m,\ X_j\in\mathcal{X}\}$ (FILTRO GENERATO) è un filtro, il più piccolo che contiene $\mathcal{X}$.

Allora basta considerare $\langle\{\Lambda_\sigma \mid \sigma\in T\}\rangle$ ed estenderlo a un ultraf.. $\square$