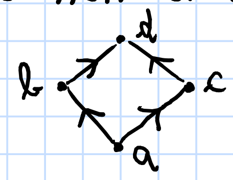
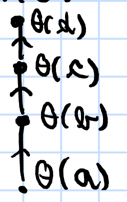
Def.: $\theta: \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ è un'IMMERSIONE se è un omomorfismo iniettivo e la condizione per le relazioni vale in entrambi i sensi.

Omomorfismo ini. $\Rightarrow$ immersione?

Es.: sì se non ci sono simboli di relazione.

Es.: $\mathcal{M}$:  ordine parziale $\xrightarrow{\theta}$  $: \mathcal{N}$, $\mathcal{L} = \{<\}$,

ma $\theta(b) < \theta(c) \not\Rightarrow b < c$.

Ex.: θ isomorfismo $\Leftrightarrow$ immersione suri..

Ex.: $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ $\mathcal{L}$-strutture, $M \subseteq N$; $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N} \Leftrightarrow$ l'inclusione $i: \mathcal{M} \hookrightarrow \mathcal{N}$ è immersione.

Ex.: se $\theta: \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ omomorfismo, allora $\mathrm{Im}(\theta)$ è l'universo di una sottostruttura $\theta(\mathcal{M}) = \mathcal{M}' \subseteq \mathcal{N}$. θ immersione $\Rightarrow \theta(\mathcal{M}) \cong \mathcal{M}$.

Teo.: $\theta: \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ omomorfismo. Per ogni formula positiva φ, $\mathcal{M} \models \varphi[\rho] \Rightarrow \mathcal{N} \models \varphi[\theta \circ \rho]$, $\rho: \mathrm{Var} \to M$.

Teo.: se $\theta: \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ un'immersione allora per ogni formula φ senza quantificatori e per ogni $\rho: \mathrm{Var} \to M$ $\mathcal{M} \models \varphi[\rho] \Leftrightarrow \mathcal{N} \models \varphi[\theta \circ \rho]$.

Cor.: $\theta: \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ immersione. Per ogni enunciato ESISTENZIALE σ (equivalente a $\exists x_1 \dots \exists x_m \underset{\text{QF}}{\varphi}(x_1, \dots, x_m)$) $\mathcal{M} \models \sigma \Rightarrow \mathcal{N} \models \sigma$. Equivalentemente, per ogni enunciato UNIVERSALE τ (equivalente a $\forall x_1 \dots \forall x_m \underset{\text{QF}}{\varphi}(x_1, \dots, x_m)$) $\mathcal{N} \models \tau \Rightarrow \mathcal{M} \models \tau$.

Dim. (del Cor.): σ è equivalente a una formula del tipo $\exists x_1 \dots \exists x_m \varphi(x_1, \dots, x_m)$ dove φ è QF. Dopodiché, è una diretta conseguenza del teo.. $\square$

Dim. (del Teo.): al solito, lungo, tediosissimo modo per induzione. $\square$

Convenzione: se φ ha variabili libere, con $\mathcal{M} \models \varphi$ intendiamo che per ogni assegnamento ρ $\mathcal{M} \models \varphi[\rho]$, cioè $\mathcal{M} \models \overline{\varphi}$ (chiusura universale).

Formule logicamente equiv.: • $\neg \exists x \varphi \equiv \forall x \neg \varphi$; • $\neg \forall x \varphi \equiv \exists x \neg \varphi$; • $\varphi \equiv \overline{\varphi}$.

Ex.: per ognuna delle seguenti coppie di formule, stabilire se sono logic. equiv. o se una segue logic. dall'altra ma non viceversa:

1) $\exists x (\varphi \wedge \psi)$, $(\exists x \varphi) \wedge (\exists x \psi)$;
2) $\exists x (\varphi \vee \psi)$, $(\exists x \varphi) \vee (\exists x \psi)$;
3) $\forall x (\varphi \wedge \psi)$, $(\forall x \varphi) \wedge (\forall x \psi)$;
4) $\forall x (\varphi \vee \psi)$, $(\forall x \varphi) \vee (\forall x \psi)$;
5) $(\forall x \varphi(x)) \to (\forall x \psi(x))$, $\forall x (\varphi(x) \to \psi(x))$;
6) $(\exists x \varphi(x)) \to (\exists x \psi(x))$, $\exists x (\varphi(x) \to \psi(x))$;
7) $\exists x \forall y \varphi(x, y)$, $\forall y \exists x \varphi(x, y)$.

Def.: φ si dice formula in forma NORMALE PREMESSA se ha la forma $Q_1 x_1 \dots Q_m x_m \psi(x_1, \dots, x_m)$ dove $Q_i = \begin{cases} \exists \\ \forall \end{cases}$. le $x_i \in VL(\psi)$ sono distinte e ψ è QF.

Prop.: per ogni formula φ esiste una formula $\varphi' \equiv \varphi$ in forma normale premessa. Dim.: ex.. $\square$

Def.: una classe $\mathcal{K}$ di $\mathcal{L}$-strutt. si dice ASSIOMATIZZABILE (o CLASSE ELEMENTARE) se esiste una $\mathcal{L}$-teoria T t.c. $\mathcal{M} \in \mathcal{K} \Leftrightarrow \mathcal{M} \models T$.

Def.: un insieme di enunciati $Ax \subseteq T$ si dice INSIEME DI ASSIOMI per una teoria T se vale $\mathcal{M} \models Ax \Rightarrow \mathcal{M} \models T$, cioè $LC(Ax) = LC(T)$.

Es.: 1) $\mathcal{K} = \{$strutture finite$\}$ non è assiomatizzabile: se una teoria T ha modelli finiti arbitrariamente grandi, per compattezza ha modelli infiniti;
2) $\mathcal{K}^c = \{$strutture infinite$\}$ è assiomatizzabile;
3) $\{$campi ordinati$\}$ è assio.;
4) $\{$campi archimedei$\}$ non è assio.. $\{$campi non archimedei$\}$ è assio.?