Def.: una classe $\mathcal{K}$ di $\mathcal{L}$-strutt. è PSEUDO-ELEMENTARE se esistono un linguaggio $\mathcal{L}' \supseteq \mathcal{L}$ e una $\mathcal{L}'$-teoria T' t.c. $\mathcal{M} \in \mathcal{K} \iff \mathcal{M} = \mathcal{M}'_{|\mathcal{L}}$ dove $\mathcal{M}'$ $\mathcal{L}'$-strutt. t.c. $\mathcal{M}' \models T'$.

Def.: una classe $\mathcal{K}$ di $\mathcal{L}$-strutt. si dice DEFINIBILE (o FINITAMENTE ASSIOMATIZZABILE) se esiste un $\mathcal{L}$-enunciato σ t.c. $\mathcal{M} \in \mathcal{K} \iff \mathcal{M} \models \sigma$ per ogni $\mathcal{L}$-strutt. $\mathcal{M}$.

Prop.: sia $\mathcal{K}$ una classe di $\mathcal{L}$-strutt.. Allora $\mathcal{K}$ è definibile $\iff$ sia $\mathcal{K}$ che $\mathcal{K}^c = \{\mathcal{M}\ \mathcal{L}\text{-strutt.} \mid \mathcal{M} \notin \mathcal{K}\}$ sono classi elementari.

Dim.: $(\Rightarrow)$ ovvia.

$(\Leftarrow)$ sia T la $\mathcal{L}$-teoria che assiomatizza $\mathcal{K}$,
" S " " " " $\mathcal{K}^c$.

$T \cup S$ è una $\mathcal{L}$-teoria insodd.; per compattezza, esistono $\tau_1, \dots, \tau_n \in T$, $\sigma_1, \dots, \sigma_m \in S$ t.c. $\{\tau_1, \dots, \tau_n, \sigma_1, \dots, \sigma_m\}$ insodd..

Allora $\tau_1 \wedge \dots \wedge \tau_n$ è l'"assioma" di $\mathcal{K}$. $\square$

Teo. (Morley): se una $\mathcal{L}$-teoria T, dove $\|\mathcal{L}\| = \aleph_0$, è κ-cat. con $\kappa > \aleph_0$, allora è κ-cat. per ogni $\kappa > \aleph_0$. Dim.: no. $\square$

Es.: la teoria dei campi ordinati reali chiusi (campi ordinati + radici quadrate + ogni pol. di grado dispari ha una radice) è assiom. ma non finit. assiom..

Ex.: assumiamo che "$\forall n\ \exists$ campo $\mathbb{F}_n$ t.c. ogni pol. di grado $\leq n$ ha radice ma non algebricamente chiuso". Mostrare che la classe dei campi alg. chiusi è assiom. ma non finit. assiom..

Teo. (Tarski): RCF (real closed fields) è completa. Dim.: no. $\square$

Es.: la teoria dei gruppi abeliani divisibili senza torsione è completa.

Pensiamoli come s.v. su $\mathbb{Q}$ $\quad \forall x \exists y\ \underbrace{y + \dots + y}_{n \text{ volte}} = x$, σ_n

(si può dimostrare).

Questa è, per esempio, $\aleph_1$-cat. $\Rightarrow$ completa.
in realtà, κ-cat. $\forall \kappa > \aleph_0$

Conseguenza: $(\mathbb{Q}, +) \equiv (\mathbb{R}, +)$.

Def.: $\mathcal{M}$ $\mathcal{L}$-strutt.. $X \subseteq M$ è DEFINIBILE (con parametri) se esiste una formula $\varphi(x, y_1, \dots, y_n)$ e parametri $b_1, \dots, b_n \in M$ t.c. $X = \{a \in M \mid \mathcal{M} \models \varphi(x, y_1, \dots, y_n)[a, b_1, \dots, b_n]\}$.

Analogamente per $X \subseteq M^k$.

Se $\mathcal{M}$ è numerabile e $\|\mathcal{L}\| = \aleph_0$, $\mathrm{Def}(\mathcal{M}) = \{X \subseteq M \mid X \text{ è definibile}\}$ è numerabile.

Prop.: $\mathcal{M} \models PA$ nonstandard. Allora $\mathbb{N}^{\mathcal{M}}$ non è definibile.

Dim.: usare induzione al prim'ordine. $\square$

Prop. (OVERSPILL): sia $\mathcal{M} \models PA$ nonstandard e sia X definibile. Se X contiene numeri finiti arbitrariamente grandi, allora esistono $\xi \in X$ infiniti.

Dim.: se per assurdo $X \subseteq \mathbb{N}^{\mathcal{M}}$, $\mathbb{N}^{\mathcal{M}}$ sarebbe definibile. $\square$

Es.: $\mathbb{N}$ è definibile in $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$? Sì (teo. dei quattro quadrati).

$\mathbb{Z}$ è definibile in $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$? Difficile (teo. di J. Robinson).

$\mathbb{Z}$ è definibile in $(\mathbb{R}, +, \cdot)$? No: $\mathbb{Z} \rightsquigarrow \mathbb{N} \rightsquigarrow PA$, incompleta, ma $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ è completa.

Ex.: $(\mathbb{N}, S)$, $(\mathbb{N}, <)$: nessun $B \subseteq \mathbb{N}$ infinito con complementare infinito è definibile.