Ex.: teoria degli insiemi + densità $= T$ ha quattro teorie complete che la estendono.

Ex.: sia $\mathbb{K}$ un campo, V s.v. su $\mathbb{K}$. Universo V. $\mathcal{L} = \{0, +\} \cup \{\underset{\downarrow}{M_\lambda} \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$.

simbolo di funzione unaria «moltiplicazione per λ»

T $\mathcal{L}$-teoria con le proprietà che definiscono gli s.v..

Sia $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}$ il linguaggio degli s.v. su $\mathbb{K}$. Allora la teoria $T_{\mathbb{K}VS}$ degli s.v. su $\mathbb{K}$ è completa.

Random graph: grafo (V, E) con la seguente proprietà:

$\forall v_1, \dots, v_k \forall u_1, \dots, u_h$ $\{v_1, \dots, v_k\} \cap \{u_1, \dots, u_h\} = \emptyset$ $\exists w \notin \{v_1, \dots, v_k, u_1, \dots, u_h\}$ t.c. $E(w, v_i), \neg E(w, u_j)$, $i = 1, \dots, k$, $j = 1, \dots, h$.

Es.: V_ω, $aEb \iff a \in b \vee b \in a$.

Ex.: esistono grafi random numerabili.

Ex.: TRG teoria dei grafi random è completa (perché è $\aleph_0$-cat.). $\to$ si fa come LDO

Es.: $\mathcal{L}$-strutt. $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$ ma $\mathcal{M} \not\prec \mathcal{N}$ e $\mathcal{N} \not\prec \mathcal{M}$.

Teo. (Shelah): $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N} \iff \exists \mathcal{U}$ ultraf. su I t.c. $\mathcal{M}^I/\mathcal{U} \cong \mathcal{N}^I/\mathcal{U}$.

Dim.: no. $\square$ Torniamo all'esempio: $\mathcal{L} = \{E\}$.

T $\mathcal{L}$-teoria "E è una rel. di equiv. e ha esattamente due classi di equiv., e tali classi sono infinite".

T è $\aleph_0$-cat. $\Rightarrow$ completa. Allora $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$ per ogni $\mathcal{M}, \mathcal{N} \models T$.

Prendo $\mathcal{M}$ con classi di equiv. di cardinalità $\aleph_0$ e $\aleph_2$ e

$\mathcal{N}$ " " " " " " $\aleph_1$ e $\aleph_1$.

Def.: un 1-TIPO è un insieme di formule $\Phi(x) = \{\varphi_i(x) \mid i \in I\}$ dove x è l'unica variabile libera.

Es.: $\Phi(x) = \{x > 0, x > S(0), x > S(S(0)), \dots\}$ è un 1-tipo nel linguaggio di PA.

Def.: $\Phi(x)$ è REALIZZATO nella struttura $\mathcal{M}$ se esiste $m \in M$ t.c. per ogni i $\mathcal{M} \models \varphi_i(x)[m/x]$.

Oss.: $\Phi(x)$ è FINITAMENTE REALIZZABILE $\Rightarrow$ realizzabile.

Dim.: per ogni $\Phi(x) \supset \Phi_0(x) = \{\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)\}$ esiste $\mathcal{M}$ e $m \in M$ t.c. $\mathcal{M} \models \varphi_1(x) \wedge \dots \wedge \varphi_n(x)[m/x]$. Prendo $\mathcal{L}^* = \mathcal{L} \cup \{\underline{c}\}$ e $T^* = \{\varphi_i(\underline{c}) \mid i \in I\}$. T^* è finit. sodd. $\Rightarrow$ sodd.. $\square$

Se $\mathcal{M}$ è una $\mathcal{L}$-strutt. e $m \in M$, il TIPO di m è

$tp_{\mathcal{M}}(m) = \{\varphi(x), x \text{ unica variabile libera} \mid \mathcal{M} \models \varphi(x)[m/x]\}$.

$tp_{\mathcal{M}}(m)$ è un tipo "completo", cioè massimale e realizzabile.

Prop.: se $f: \mathcal{M} \prec \mathcal{N}$ allora per ogni $a \in M$ $tp_{\mathcal{M}}(a) = tp_{\mathcal{N}}(f(a))$.

Dim.: ovvio dalle def.. $\square$

Prop.: in $(\mathbb{Q}, <)$ tutti gli elementi hanno lo stesso tipo.

Dim.: gli automorfismi sono transitivi. $\square$

Ex.: in $(\mathbb{Q}, <, +)$ esistono esattamente tre tipi (>0, <0, 0).

Ex.: in $(\mathbb{Q}, <, +, \cdot)$ elementi diversi hanno tipi diversi.

Prop.: esistono $2^{\aleph_0}$ diverse classi di isomorfismo di modelli numerabili di PA.

Dim.: primi $P = \{p_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Per ogni $A \subseteq P$,

$\Phi_A(x) = \{\text{"}p \mid x\text{"} \mid p \in A\} \cup \{\neg\text{"}p \mid x\text{"} \mid p \notin A\}$. Sono $2^{\aleph_0}$.

Se $\mathcal{M} \cong \mathcal{N}$, $\mathcal{M} \models \Phi_A \iff \mathcal{N} \models \Phi_A$.

Per ogni classe di isomorfismo $[\mathcal{M}]_\cong \longmapsto \underbrace{\{A \subseteq P \mid \mathcal{M} \models \Phi_A\}}_{\Psi(\mathcal{M})}$.

$\mathcal{M}$ numerabile $\Rightarrow |\Psi(\mathcal{M})| \leq \aleph_0$.

Se mostro che per ogni $A \subseteq P$ esiste $\mathcal{M}_A$ numerabile t.c. $\mathcal{M}_A \models \Phi_A$, ho concluso. Ma Φ_A è finit. realizzabile per ogni $A \subseteq P$ $\underset{\downarrow}{\Rightarrow}$ ok. $\square$

serve anche LS