Sistema dimostrativo del CP1

Assiomi logici

"Istanze" di taut., cioè per ogni taut. $A(X_1,\dots,X_m)$ e per formule $\varphi_1,\dots,\varphi_m$ $A(\varphi_1/X_1,\dots,\varphi_m/X_m)$ è un assioma.

Assiomi dell'uguaglianza:

- $\forall x\ x=x$;
- $\forall x\forall y\ x=y\to y=x$;
- $\forall x\forall y\forall z\ (x=y\wedge y=z)\to x=z$;
- F simbolo di funzione m-ario, $t_1,\dots,t_m$, $t_1',\dots,t_m'$ termini, l'assioma è $\left(\bigwedge_{i=1}^{m} t_i=t_i'\right)\to F(t_1,\dots,t_m)=F(t_1',\dots,t_m')$;
- l'analogo per le relazioni con il $\leftrightarrow$.

Quantificazione:

(Q1) $\forall x\varphi(x)\to\varphi(t/x)$ se $\varphi(x)$ è una formula dove x é libera e il termine t è LIBERO per x in φ, cioè ogni variabile di t non è quantificata quando sostituita ad x in φ (es.: un termine CHIUSO, cioè senza variabili, è sostituibile; una variabile y che non appare in φ è libera per x in φ; x è libera per x in φ);

(Q2) "tecnico", $\forall x(\varphi\to\psi(x))\to(\varphi\to\forall x\psi(x))$ se x è libera in ψ ma non in φ;

(Q3) $\forall x\ \varphi(x)\leftrightarrow\neg\exists x\neg\varphi(x)$.

Regole di deduzione:

- modus ponens: $\dfrac{\varphi,\ \varphi\to\psi}{\psi}$ MP;
- generalizzazione: $\dfrac{\varphi(x)}{\forall x\varphi(x)}$ GEN.

Def.: Γ insieme di formule, φ formula. $\Gamma\vdash\varphi$ significa che esiste una "dimostrazione" $\langle\varphi_1,\dots,\varphi_m\rangle$, cioè una sequenza finita di formule dove φ_m è φ e per ogni $i\le m$

- $\varphi_i\in A_x\cup\Gamma$, oppure
- φ_i è deducibile dai φ_j con $j<i$ usando le regole di deduzione.

Obiettivo:

1) per ogni teoria T e per ogni enunciato σ, $T\models\sigma\iff T\vdash\sigma$.
$\Leftarrow$ é la "correttezza", $\Rightarrow$ è la "completezza";

2) se T è coerente allora esiste $M\models T$.

1) $\iff$ 2): ($\Leftarrow$) $T\nvdash\sigma\iff T\cup\{\neg\sigma\}$ coerente $\Rightarrow\exists M\models T\cup\{\neg\sigma\}\Rightarrow$ $\Rightarrow T\not\models\sigma$;

($\Rightarrow$) se T è coerente, esiste σ t.c. $T\nvdash\sigma$. Allora $T\not\models\sigma$, cioè esiste $M\models T\cup\{\neg\sigma\}\Rightarrow M\models T$.

Da 1) e 2) si dimostra la compattezza semantica; infatti, cptezza sintattica é facile da dimostrare.
$\hookrightarrow$ se ogni $T_0\subseteq T$ finita è coerente, T è coerente

Ex.: $T\vdash\varphi\iff T\vdash\overline{\varphi}$.

Ex.: $T\vdash\sigma$ e $T\vdash\neg\sigma\iff$ per ogni φ, $T\vdash\varphi$.

Teo. (di deduzione di Herbrand): sia σ enunciato, Γ insieme di formule, φ formula. $\Gamma,\sigma\vdash\varphi\iff\Gamma\vdash\sigma\to\varphi$.

Dim.: ($\Leftarrow$) facile.

($\Rightarrow$) Sia $\langle\varphi_1,\dots,\overset{=\varphi}{\varphi_m}\rangle$ dim. di $\Gamma,\sigma\vdash\varphi$.
Per induzione su $k\le m$, vedremo $\Gamma\vdash\sigma\to\varphi_k$.
Notiamo che se $\psi\in\Gamma\cup A_x\cup\{\sigma\}$ allora $\Gamma\vdash\sigma\to\psi$
(sono un paio di giochetti tautologici).

$k=1$: $\varphi_1\in\Gamma\cup A_x\cup\{\sigma\}$ ok.

$k>1$: se $\varphi_k\in$ " ok. Altrimenti ho due casi:

1) esistono $i,j<k$ t.c. φ_j è $\varphi_i\to\varphi_k$. Per ipotesi induttiva $\Gamma\vdash\sigma\to\varphi_i$ e $\Gamma\vdash\sigma\to(\varphi_i\to\varphi_k)$.
Ma $\Gamma\vdash(\sigma\to\varphi_j)\to((\sigma\to(\varphi_i\to\varphi_k))\to(\sigma\to\varphi_k))$ φ_j
e si applica MP due volte;

2) $\exists i<k$ t.c. φ_i è $\psi(x)$ e φ_k è $\forall x\psi(x)$.
Per ip. induttiva, $\Gamma\vdash\sigma\to\psi(x)$. Per GEN, $\Gamma\vdash\forall x(\sigma\to\psi(x))$. Per (Q2), $\Gamma\vdash\forall x(\sigma\to\psi(x))\to(\sigma\to\forall x\psi(x))$.
Per MP concludo. $\square$

Ex.: $\vdash\varphi\leftrightarrow\overline{\varphi}$.

Ex.: $\Gamma\vdash\sigma\iff\Gamma\cup\{\neg\sigma\}$ contraddittoria.

Cor.: T teoria coerente, allora per ogni enunciato σ $T\cup\{\sigma\}$ è coerente o $T\cup\{\neg\sigma\}$ è coerente.

Ex.: $T\cup\{\tau\}\vdash\sigma$ e $T\cup\{\neg\tau\}\vdash\sigma\Rightarrow T\vdash\sigma$.

Correttezza: $T\vdash\sigma\Rightarrow T\models\sigma$.

1) Ogni assioma logico è vero in tutte le strutture.
2) Le regole di deduzione preservano le formule logicamente vere.

1) Si fanno le opportune verifiche. 2) Pure.

Teo.: correttezza: $T\vdash\varphi\Rightarrow T\models\varphi$.

Dim.: sia $\langle\varphi_1,\dots,\varphi_m\rangle$ dim. di $T\vdash\varphi$. Per induzione su $k\le m$ si mostra che $T\models\varphi_k$. Si usano 1) e 2) sopra. $\square$