Completezza del CP1: T coerente $\Rightarrow$ esiste $\mathcal{M} \models T$.

Piano: 1) lemma della costante generica:
T $\mathcal{L}$-teoria, $c \notin \mathcal{L}$ costante, $\varphi(x)$ $\mathcal{L}$-formula dove $VL(\varphi) = \{x\}$. Se $T \vdash \varphi(c/x)$ allora $T \vdash \forall x \varphi(x)$;

2) estendere T a una teoria coerente $H \supseteq T$ in un linguaggio $\mathcal{L}' \supseteq \mathcal{L}$ di "Henkin", cioè una teoria dove per ogni $\mathcal{L}'$-formula $\varphi(x)$ esiste una costante "generica" c t.c. "$\varphi(c/x) \to \forall x \varphi(x)$" $\in H$; $VL(\varphi) = \{x\}$

3) estendiamo H a una teoria $H^* \supseteq H$ completa (coerente massimale) (se H di Henkin, anche H^* di Henkin);

4) ogni teoria di Henkin completa ha un modello.

Quindi esiste $\mathcal{M} \models H^* \Rightarrow \mathcal{N} = \mathcal{M}_{|\mathcal{L}} \models T$.

Teo.: ogni teoria di Henkin H completa ha un modello $\mathcal{M} \models H$.

Dim.: l'universo di $\mathcal{M}$ è $M = CT(\mathcal{L}')/\approx$, l'insieme quoziente dell'insieme dei termini chiusi modulo la relazione di equivalenza $t \approx t' \Leftrightarrow H \vdash t = t'$ (visto che H è completa, questo equivale a "$t = t'$" $\in H$).

A partire dagli assiomi dell'uguaglianza, si dimostra che $\approx$ è una rel. di equiv. t.c. $t_i \approx t'_i,\ i = 1, \dots, n \Rightarrow F(t_1, \dots, t_n) = F(t'_1, \dots, t'_n)$ e $H \vdash R(t_1, \dots, t_n) \Leftrightarrow H \vdash R(t'_1, \dots, t'_n)$.

Denotiamo con $\bar{t}$ la classe di equiv. di $t \in CT(\mathcal{L}')$.

- c simbolo di costante: $c^{\mathcal{M}} = \bar{c}$;
- F simbolo di funzione n-aria: $F^{\mathcal{M}}: M^n \to M$, $(\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_n) \mapsto \overline{F(t_1, \dots, t_n)}$; è ben def.
- R " " relazione " : $(\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_n) \in R^{\mathcal{M}} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow R(t_1, \dots, t_n) \in H$. è ben def.

Per ogni formula $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ e $\rho: Var \to CT(\mathcal{L}')$, definisco φ_ρ l'enunciato $\varphi(\rho(x_1)/x_1, \dots, \rho(x_n)/x_n)$.

Dimostreremo che $\mathcal{M} \models \varphi[\bar{\rho}] \Leftrightarrow \varphi_\rho \in H$, dove $\bar{\rho}: Var \to M$, $x \mapsto \overline{\rho(x)}$. In particolare, se σ è un enunciato avremo che $\mathcal{M} \models \sigma \Leftrightarrow \sigma \in H$.
per ogni ρ, $\sigma_\rho = \sigma$

Vediamo prima i termini.

Lemma: se s è un termine, $s^{\mathcal{M}, \bar{\rho}} = \overline{s_\rho}$ dove se $s = s(x_1, \dots, x_n)$, $s_\rho = s(\rho(x_1)/x_1, \dots, \rho(x_n)/x_n)$.

Dim.: quella che ti aspetti. $\square$

Poi si fa la solita induzione. Il fatto che H è di Henkin si usa per il $\forall$. $\square$