Teo. 1: ogni teoria coerente T in un linguaggio $\mathcal{L}$ si estende ad una teoria di Henkin coerente H in un linguaggio $\mathcal{L}' \supseteq \mathcal{L}$.

Teo. 2: ogni teoria coerente S si estende ad una teoria $S^* \supseteq S$ completa.

Lemma (della costante generica): T $\mathcal{L}$-teoria, $\varphi(x)$ $\mathcal{L}$-formula dove x è l'unica variabile libera, $c \notin \mathcal{L}$ simbolo di costante. Allora $T \vdash \varphi(c/x)$ nel linguaggio $\mathcal{L} \cup \{c\}$ $\Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow T \vdash \forall x \varphi(x)$ " " $\mathcal{L}$.

Dim. (del lemma): ($\Longleftarrow$) facile.

($\Longrightarrow$) Se $\langle \psi_1, \dots, \psi_n \rangle$ è una dimostrazione di $\overbrace{T \vdash \theta}^{\text{in } \mathcal{L} \cup \{c\}}$ e se y non compare mai nelle ψ_i, allora $\langle \psi_1(y/c), \dots, \psi_n(y/c) \rangle$ lo è di $T \vdash \theta(y/c)$ in $\mathcal{L}$. Infatti, notiamo che se ψ è un assioma logico nel linguaggio $\mathcal{L} \cup \{c\}$ e y non compare ψ, allora $\psi(y/c)$ è un assioma logico in $\mathcal{L}$. Per induzione, si mostra che $T \vdash \psi_k(y/c)$ per $1 \leq k \leq n$.

Allora $T \vdash \varphi(y/x)$ in $\mathcal{L}$ (y "nuova" variabile). Ma allora x è libera per y in $\varphi(y/x)$, quindi per GEN $T \vdash \forall y \varphi(y/x)$, (Q1) $\vdash \forall y \varphi(y/x) \rightarrow \varphi(x)$, per MP $T \vdash \varphi(x)$ e per GEN $T \vdash \forall x \varphi(x)$. $\square$

Dim. (del teo. 1): $\begin{cases} H_0 = T \\ \mathcal{L}_0 = \mathcal{L} \end{cases}$. $\mathcal{L}_{n+1} = \mathcal{L}_n \cup \left\{ c_\varphi \,\middle|\, \begin{matrix} \varphi(x) \ \mathcal{L}_n\text{-formula,} \ (\text{non } \mathcal{L}_{n-1}\text{-formula}) \\ VL(\varphi) = \{x\} \end{matrix} \right\}$,

$H_{n+1} = H_n \cup \left\{ \varphi(c_\varphi/x) \rightarrow \forall x \varphi(x) \,\middle|\, \begin{matrix} \varphi(x) \ \mathcal{L}_n\text{-formula,} \ (\text{non } \mathcal{L}_{n-1}\text{-formula}) \\ VL(\varphi) = \{x\} \end{matrix} \right\}$.

$\mathcal{L}' = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \mathcal{L}_n$ e $H = \bigcup_{n=0}^{+\infty} H_n$ funziona ($H \supseteq T$, è di Henkin).

È coerente: per compattezza sintattica, basta verificarlo per gli H_n.

Induzione: H_0 ok. $n \Rightarrow n+1$: di nuovo per compattezza sintattica, basta $H_n \cup \{ \varphi_i(c_{\varphi_i}/x) \rightarrow \forall x \varphi_i(x) \mid i = 1, \dots, k, \ \varphi_i \ \mathcal{L}_n\text{-formule} \}$.

Basta questo: S $\mathcal{L}$-teoria coerente, $\varphi(x)$ $\mathcal{L}$-formula (non $\mathcal{L}_{n-1}$-f.) con $VL(\varphi) = \{x\}$, $c \notin \mathcal{L}$ simbolo di costante. Allora $S \cup \{\varphi(c/x) \rightarrow \forall x \varphi(x)\}$ coerente.

Altrimenti, $S \vdash \neg(\varphi(c/x) \rightarrow \forall x \varphi(x))$; usando istanze di tautologie e MP, $S \vdash \varphi(c/x)$ e $S \vdash \neg \forall x \varphi(x)$, contro il lemma. $\square$

Teo. 2a: T $\mathcal{L}$-teoria coerente con $|\mathcal{L}| \leq \aleph_0$, allora esiste $T^* \supseteq T$ $\mathcal{L}$-teoria completa.

Dim. (del teo. 2a, senza AC): enumero tutti gli $\mathcal{L}$-enunciati: $(\sigma_n \mid n \in \mathbb{N})$. $S_0 = T$. $S_{n+1} = \begin{cases} S_n \cup \{\sigma_n\} & \text{se coerente} \\ S_n & \text{altrimenti} \end{cases}$.

$T^* = \bigcup_{n=0}^{+\infty} S_n \supseteq T$ ed è coerente (cptezza sintattica).

È completa, cioè coerente massimale: sia τ enunciato t.c. $T^* \cup \{\tau\}$ coerente. Sia n t.c. σ_n è τ. $T^* \cup \{\sigma_n\}$ coerente $\Rightarrow$

$\Rightarrow S_n \cup \{\sigma_n\}$ coerente $\Rightarrow S_{n+1} = S_n \cup \{\sigma_n\} \Rightarrow \sigma_n \in S_{n+1} \subseteq T^*$. $\square$

Dim. (del teo. 2, caso generale, in ZF+ "lemma dell'ultrafiltro UL"):

$I = \{S \supseteq T \mid S \text{ teoria coerente}\}$. Per ogni enunciato τ, considero $X^+_\tau = \{S \in I \mid \tau \in S\}$, $X^-_\tau = \{S \in I \mid \neg\tau \in S\}$. $\hat{\tau} = X^+_\tau \cup X^-_\tau$.

$\mathcal{F} = \{\hat{\tau} \mid \tau \text{ enunciato}\}$ ha la FIP. UL $\Rightarrow \exists\, \mathcal{U}$ ultrafiltro su I t.c. $\hat{\tau} \in \mathcal{U}$ per ogni τ. Definisco $T^* = \{\tau \mid X^+_\tau \in \mathcal{U}\}$.

Ovviamente $T \subseteq T^*$. La completezza segue dalle proprietà di ultrafiltro. $\square$

Teo. (in ZF): TFAE:

(1) teorema di completezza;

(2) teorema di compattezza semantico;

(3) UL.

Dim.: (3) $\Rightarrow$ (1) già visto.

(1) $\Rightarrow$ (2) se T è finit. sodd., allora $\forall T_0 \subseteq T$ finito $\exists \mathcal{M} \models T_0$, quindi T_0 è coerente. Per cptezza sintattica, T coerente.

Per completezza, $\exists \mathcal{M}^* \models T$.

(2) $\Rightarrow$ (3) $\mathcal{F}$ famiglia di sottoinsiemi di I con la FIP.

$\mathcal{L} = \{ \underset{\substack{\downarrow \\ \text{simbolo di} \\ \text{relazione 1-aria}}}{\underline{A}} \mid A \subseteq I \} \cup \{ \underset{\substack{\downarrow \\ \text{simbolo di} \\ \text{costante}}}{\underline{c}} \}$.

$T = \{\underline{A}(\underline{c}) \mid A \in \mathcal{F}\} \cup \{\neg \underline{\emptyset}(\underline{c}), \underline{I}(\underline{c})\} \cup \{\underline{A}(\underline{c}) \wedge \underline{B}(\underline{c}) \rightarrow \underline{A \cap B}(\underline{c})\} \cup$

$\cup \{\neg \underline{A}(\underline{c}) \rightarrow \underline{A^c}(\underline{c})\}$. T è finit. sodd.. Per cptezza, $\exists \mathcal{M} \models T$. $\mathcal{U} = \{A \subseteq I \mid \mathcal{M} \models \underline{A}(\underline{c})\}$. $\square$