TRUE ARITHMETIC $TA = Th(\mathbb{N}, +, \cdot)$ è INDECIDIBILE.

Cor.: PA è incompleta.

Per rendere precisa questa affermazione occorre fissare una "codifica effettiva" delle formule del linguaggio dell'aritmetica, cioè occorre attribuire in modo univoco ad ogni formula φ un numero naturale $\ulcorner\varphi\urcorner \in \mathbb{N}$.

Aritmetizzazione della sintassi del linguaggio $\mathcal{L} = \{+, \cdot, S, 0\} \rightsquigarrow$
$\rightsquigarrow$ assegno ad ogni simbolo di $\mathcal{L}$ e ad ogni simbolo logico un numero naturale e poi, in modo "effettivo", assegno induttivamente un numero naturale ad ogni termine e poi ad ogni formula di $\mathcal{L}$. Possiamo farlo in modo che

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \mathrm{Term}(\mathcal{L}) \\ \bullet\ \mathrm{Form}(\mathcal{L}) \\ \bullet\ \mathrm{Enun}(\mathcal{L}) \end{array}\right\} \text{siano insiemi decidibili (anzi PR).}$$

Inoltre anche Ax sarà PR.

Def.: una teoria T è DECIDIBILE se $\{\ulcorner\sigma\urcorner \mid T \vdash \sigma\} \subseteq \mathbb{N}$ è un insieme decidibile.

Ricordiamo che un predicato k-ario A su $\mathbb{N}$ si dice decidibile se $\{\vec{x} \in \mathbb{N}^k \mid A(\vec{x})\} \subseteq \mathbb{N}^k$ è decidibile, analogo per semidecidibile.

Vale la proprietà: $A(\vec{x})$ semidec. $\Longleftrightarrow A(\vec{x}) = \exists y\, R(\vec{x}, y)$ con R dec.

($\Leftarrow$) $g(\vec{x}, y) = \begin{cases} \vec{x} & \text{se } R(\vec{x}, y) \\ \vec{a} & \text{se } \neg R(\vec{x}, y) \end{cases}$ dove $\vec{a} \in \mathbb{N}^k$ è t.c. $\exists y\, R(\vec{a}, y)$.

g è calcolabile totale e $\mathcal{I}m\, g = \{\vec{x} \mid A(\vec{x})\}$.

($\Rightarrow$) Esiste $g: \mathbb{N}^h \to \mathbb{N}^k$ calc. totale t.c. $\vec{x} \in \mathcal{I}m\, g \Leftrightarrow A(\vec{x})$.

Ma allora $A(\vec{x}) \equiv \exists \vec{y}$ "$\vec{x} = g(\vec{y})$". Notiamo che se g è calcolabile totale allora "$\vec{x} = g(\vec{y})$" è un predicato decidibile.

Def.: una teoria T è RICORSIVAMENTE ASSIOMATIZZABILE se esiste un suo insieme di assiomi Ax_T ($Ax_T \vdash \sigma \Longleftrightarrow T \vdash \sigma$) decidibile.

Es.: PA è RA; vedremo che TA non lo è.

Proprietà: se T è RA, allora il seguente predicato è decidibile:

$\mathrm{Prov}_T(n, \ulcorner\sigma\urcorner) \Longleftrightarrow n$ codifica una sequenza finita $\langle \varphi_1, \dots, \varphi_m \rangle$ di formule che sono una dimostrazione di $T \vdash \sigma$.

attenzione a cosa vuol dire

$\mathrm{Teor}_T(\ulcorner\sigma\urcorner) \equiv \exists n\, \mathrm{Prov}_T(n, \ulcorner\sigma\urcorner)$, "$\sigma$ è un teorema di T, cioè $T \vdash \sigma$" è un predicato semidecidibile.

Prop.: T RA e completa $\Rightarrow T$ decidibile.

Dim.: $\mathrm{Teor}(T) = \{\ulcorner\sigma\urcorner \mid T \vdash \sigma\}$ è semidecidibile. Anche

$\mathrm{Teor}(T)^c = \{\ulcorner\tau\urcorner \mid T \nvdash \tau\} = \{\ulcorner\tau\urcorner \mid T \vdash \neg\tau\}$ lo è

(nota: l'insieme delle codifiche degli enunciati è decidibile).

Si conclude applicando Post. $\square$

Importante: esistono teorie decidibili non complete. Es.:

- ACF (algebraic closed field);
- teoria dei gruppi abeliani (invece la teoria dei gruppi è indecidibile).

$Th(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, <)$ è decidibile perché Tarski ha dimostrato che la teoria dei campi ordinati reali chiusi (ogni pol. di grado dispari ha una radice) è completa.

La teoria del successore T_S è completa, quindi decidibile.

T_S: $\forall x \forall y\, (S(x) = S(y) \to x = y)$
$\forall x\, (x \neq 0 \to \exists y\, S(y) = x)$
$\forall x\, (S(x) \neq 0)$.

$(T_S = Th(\mathbb{N}, S, 0))$

Ex.: T_S è κ-cat. $\forall \kappa > \aleph_0$.

Def.: $A \subseteq \mathbb{N}^k$ è DEFINIBILE in $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ se esiste $\varphi(x_1, \dots, x_k)$ nel linguaggio $\mathcal{L} = \{+, \cdot\}$ t.c. $(a_1, \dots, a_k) \in A \Longleftrightarrow \mathbb{N} \models \varphi(x_1, \dots, x_k)[a_1, \dots, a_k]$.

Es.: la funzione successore $S: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ è definibile, cioè $\mathrm{graph}(S)$ è definibile. $\{0\}$ è definibile, dunque per ogni $n \in \mathbb{N}$ $\{n\}$ è definibile. $\leq$ è definibile, cioè $\{(n, m) \mid n \leq m\}$ lo è.

Def.: una formula si dice RISTRETTA o DI CLASSE Δ_0 se tutti i suoi quantificatori appaiono in forma "ristretta", cioè $\forall x \leq t\, \varphi(x)$ oppure $\exists x \leq t\, \varphi(x)$ dove t è un termine.

Es.: "x è un numero primo" è Δ_0.

Def.: una formula è DI CLASSE Σ_1 se si ottiene a partire da una formula Δ_0 usando $\wedge$, $\vee$, quantificatori ristretti e quantificatori esistenziali (non ristretti).

Prop.: ogni formula Σ_1 è equivalente in $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ ad una formula del tipo $\exists x\, \theta(x)$ dove $\theta(x) \in \Delta_0$.

Dim.: ex. Si usa la bigezione $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. $\square$
$(x, y) \mapsto \frac{(x+y)(x+y+1)}{2} + y$

Teo.: una funzione (anche parziale) $f: \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ è GK-calcolabile $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ è definita da una formula Σ_1.

Dim.: ($\Rightarrow$) Intanto, tutte le funzioni base sono Δ_0-definibili. Vediamo poi che le funzioni Σ_1-def. sono chiuse per composizione, ricorsione primitiva e minimalizzazione.

Per ricorsione primitiva si usa:

Teo. (Gödel): esiste una funzione $\beta: \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ (→ PR) definibile da una formula Δ_0 t.c. per ogni sequenza finita $\mathcal{S} = (b_0, b_1, \dots, b_n)$ esistono c, d t.c. $\beta(c, d, i) = b_i$ per ogni $i = 1, \dots, n$.

($\Leftarrow$) Prossima lezione. $\square$