Testi: H. Davenport, *Multiplicative Number Theory* 3ª ed

Appunti di Carlo Viola

The Theory of the Riemann Zeta Functions, E.C. Titchmarsh

$\pi(x) = \sum_{p \leq x} 1$

$\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n)$ Chebyshev

$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p & \text{se } n = p^a, a \geq 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$ Von Mangoldt

$$\pi(x) \sim li(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t} \sim \frac{x}{\log x}$$

Dim. elementare $\rightarrow$ A. Selberg, 1949

$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$, $s > 1$ è una serie di Dirichlet

$= \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}$

Notazione: $s = \sigma + it$

Capitolo 8 Davenport: Memoria di Riemann (1859)

① Prop. (Riemann): $\zeta(s)$ è prolungabile analiticamente come funzione meromorfa a $\mathbb{C}$ con un unico polo semplice in $s=1$ di residuo $=1$. $\zeta(s) = \frac{1}{s-1}$ $(s \rightarrow 1)$

② Posto $\xi(s) = \pi^{-s/2} \frac{s(s-1)}{2} \Gamma(s/2) \zeta(s)$, $\xi(s)$ è intera e soddisfa $\xi(s) = \xi(1-s)$.

Def.: si dice striscia critica la seguente: $0 \leq \sigma \leq 1$, $t \in \mathbb{R}$.

Congetture di Riemann:

1) ζ ha infiniti zeri nella striscia critica, distribuiti simmetricamente alla bisettrice $\sigma = \frac{1}{2}$ e all'asse reale $t=0$

2) detto $N(T) = \{\rho = \beta + i\gamma \mid \zeta(\rho) = 0, 0 \leq \beta \leq 1, 0 < \gamma < T\}$, si ha $N(T) \sim \frac{T}{2\pi} \log\left(\frac{T}{2\pi}\right) - \frac{T}{2\pi}$

= con un resto di $O(\log T)$

(Von Mangoldt, ~ 1890)

$$\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} = -\frac{\zeta'}{\zeta}(s), \ s > 1 \right)$$

3) Formula esplicita: $\psi(x) = x - \sum_\rho \frac{x^\rho}{\rho} - \frac{1}{2}\log(1-x^2) - \frac{\zeta'}{\zeta}(0)$

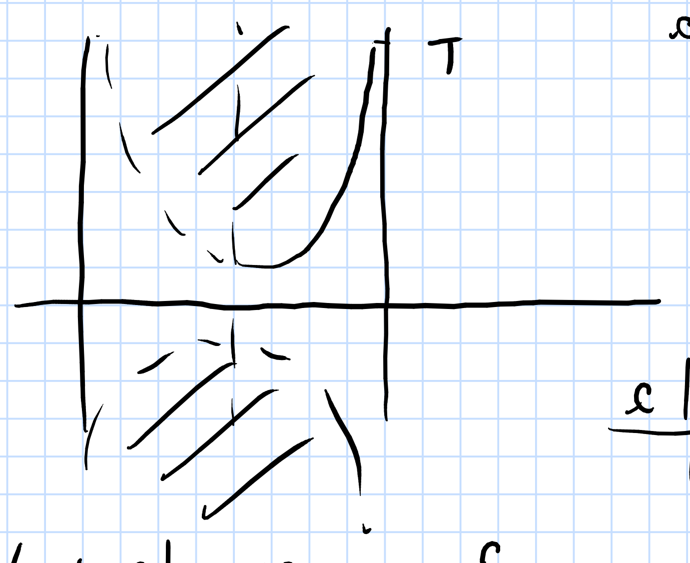
($\Longrightarrow \psi(x) \sim x$, PNT 1896 Hadamard, de la Valleé-Poussin)

$\left|\frac{x^\rho}{\rho}\right| = \frac{x^\beta}{|\rho|}$ Se $0 < \beta \leq \theta < 1$,

$= O\left(\frac{x^\theta}{|\rho|}\right) \Rightarrow \left|\sum_\rho \frac{x^\rho}{\rho}\right| \leq x^\theta \sum_{\gamma > 0} \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\bar\rho}\right)$

H, dlV-P dimostrano $\beta < 1$. $\sup_\gamma \beta = 1$?

H, dlV-P, 1899: $\psi(x) = x + \underbrace{O(x \exp(-c\sqrt{\log x}))}_{= o(x/(\log x)^A) \ \forall A > 0}$



$\frac{c}{\log T}$

$\frac{c \log\log T}{\log T}$ (Littlewood, 1922)

I. Vinogradov, 1958: $\frac{c}{(\log T)^{2/3+\varepsilon}}$

$$\psi(x) - x = O\left(x \exp\left(-c\sqrt{\log x \log\log x}\right)\right) \quad \text{(Littlewood)}$$

$$= O\left(x \exp\left(-c(\log x)^{3/5-\varepsilon}\right)\right) \quad \text{(Vinogradov)}$$

Poiché Γ ha poli semplici in $s=-n$, $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(s/2)$ ha poli in $s=-2n \Rightarrow \zeta(-2n) = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$, gli zeri banali.

4) $\xi(s) = e^{A+Bs} \prod_\rho \left(1 - \frac{s}{\rho}\right) e^{s/\rho}$, prodotto infinito di Weierstrass.

5) RH: $\beta = 1/2$ $\forall \gamma$.

$(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*$ $\phi(q)$ elementi

$\chi_q : (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^* \longrightarrow \mathbb{C}$ completamente moltiplicativa

$\{s \in \mathbb{C} \mid |s| = 1\}$

$q = p$ primo $\rightarrow$ Davenport, capitolo 1. Caso generale: capitolo 4.

Se $(n,q) > 1$, $\chi_q(n) = 0 \Rightarrow \chi_q(nm) = \chi_q(n)\chi_q(m)$ $\forall n, m \in \mathbb{Z}$

$\chi_q^2(-1) = \chi_q((-1)^2) = \chi_q(1) \Rightarrow \chi_q(-1) = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases}$

χ_0 carattere principale modulo q

$\chi_0 = \begin{cases} 1 & \text{se } (n,q) = 1 \\ 0 & \text{se } (n,q) > 1 \end{cases}$ $G_q = \{\chi_q \bmod q, \cdot\}$

Relazioni di ortogonalità:

$$\frac{1}{\phi(q)} \sum_{n=1}^{q} \chi_q(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } \chi_q = \chi_0 \\ 0 & \text{se } \chi_q \neq \chi_0 \end{cases}$$

$$\frac{1}{\phi(q)} \sum_{\chi (\mathrm{mod}\, q)} \chi(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n \equiv 1 \ (q) \\ 0 & \text{se } n \not\equiv 1 \ (q) \end{cases}$$

$n \equiv a$ (q), $(a,q) = 1 \Longrightarrow n \cdot a^{-1} \equiv 1$ (q)

$\chi(na^{-1}) = \chi(n)\chi(a^{-1}) = \chi(n)\chi^{-1}(a) = \chi(n)\bar\chi(a)$

$$\frac{1}{\phi(q)} \sum_{\chi (\mathrm{mod}\, q)} \bar\chi(a)\chi(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n \equiv a \ (q) \\ 0 & \text{se } n \not\equiv a \ (q) \end{cases}$$

$L(s, \chi_q) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\chi_q(n)}{n^s}$, $\sigma > 1$

$\pi(x,q,a) = \sum_{p \equiv a (q), \, p \leq x} 1 \longrightarrow +\infty$ (Dirichlet)

$\psi(x,q,a) = \sum_{n \equiv a (q), \, n \leq x} \Lambda(n) \sim \frac{x}{\phi(q)}$

$\downarrow$

$\sum_{p \equiv a (q)} \frac{1}{p} = +\infty$