Dim. (del lemma della volta scorsa): poiché $m_n \in \mathbb{Z}$, per l'Oss. φ non dipende dal cammino γ. $f_1(z)=f(z)-\frac{m_1}{z-z_1}$ è olo. in $\mathbb{C}\setminus\{z_2,z_3,\dots\}\Rightarrow$

$\Rightarrow \exp\left(\int_0^z f_1(w)\,dw\right)$ è olo. in $\mathbb{C}\setminus\{z_2,z_3,\dots\}$.

$$\varphi(z)=\exp\left(\int_0^z f_1(w)\,dw + m_1\int_0^z \frac{dw}{w-z_1}\right)$$

$$\int_0^z \frac{dw}{w-z_1}=\log\left(\frac{z-z_1}{-z_1}\right) \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi(z)=\exp\left(\int_0^z f_1(w)\,dw\right)\cdot \exp\left(m_1\log\left(\frac{z-z_1}{-z_1}\right)\right)=$$

$$=\exp\left(\int_0^z f_1(w)\,dw\right)\cdot(z-z_1)^{m_1}\cdot(-z_1)^{-m_1}=\varphi_1(z)(z-z_1)^{m_1}. \quad \square$$

I lemmi consentono di trovare una funzione meromorfa su $\mathbb{C}$ con zeri e poli di molteplicità assegnata in successione (che non abbia limiti finiti).

Teorema (Weierstrass): F meromorfa in $\mathbb{C}$ e siano $z_1,z_2,\dots,z_m,\dots$ gli zeri e i poli di molteplicità $|m_n|$ ($z_n\neq0$). $\exists$ successione $p_n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ e una funzione intera $G(z)$ t.c.

$$F(z)=e^{G(z)}\prod_n\left(1-\frac{z}{z_n}\right)^{m_n}\exp\left(m_n\sum_{k=1}^{p_n}\frac1k\left(\frac{z}{z_n}\right)^k\right)$$

dove il prodotto infinito converge uniformemente in ogni $K\subset\subset\mathbb{C}\setminus\{z_1,z_2,\dots\}$ cpt. Inoltre $\sum_{n=1}^{+\infty}|m_n|\left|\frac{z}{z_n}\right|^{p_n+1}<+\infty$ $(\forall z\in K)$.

Dim.: costruiamo $f(z)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{z}{z_n}\right)^{p_n}\frac{m_n}{z-z_n}$ come in ML e $\varphi(z)=\exp\left(\int_0^z\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{w}{z_n}\right)^{p_n}\frac{m_n}{w-z_n}\,dw\right)$ come nel lemma 2.

Osserviamo che

$$\left(\frac{w}{z_n}\right)^{p_n}\frac{1}{w-z_n}=\frac{1}{w-z_n}+\frac{1}{z_n}\sum_{k=0}^{p_n-1}\left(\frac{w}{z_n}\right)^k. \quad \text{Allora}$$

$$\varphi(z)=\prod_{n=1}^{+\infty}\exp\left(\int_0^z\left(\frac{m_n}{w-z_n}+\frac{m_n}{z_n}\sum_{k=0}^{p_n-1}\left(\frac{w}{z_n}\right)^k\right)dw\right)=$$

$$=\prod_{n=1}^{+\infty}\exp\left(m_n\log\left(\frac{z-z_n}{-z_n}\right)+m_n\sum_{k=1}^{p_n}\frac1k\left(\frac{z}{z_n}\right)^k\right)=$$

$$=\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{z}{z_n}\right)^{m_n}\exp\left(m_n\sum_{k=1}^{p_n}\frac1k\left(\frac{z}{z_n}\right)^k\right).$$

Osserviamo ora che $\frac{F(z)}{\varphi(z)}$ è intera mai nulla in $\mathbb{C}\Rightarrow\exists\, G(z)$ t.c.

$\frac{F(z)}{\varphi(z)}=e^{G(z)}\Rightarrow F(z)=\varphi(z)e^{G(z)}\Rightarrow$ tesi. $\square$

Oss.: $F(z)$ ha uno zero o un polo di molteplicità $|m|$ in 0. Si applica il Teo. a $\tilde F(z)=\frac{F(z)}{z^m}$.

Cor.: si ha $G(z)=\log F(0)+\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k!}D^{k-1}\left(\frac{F'}{F}(z)\right)_{z=0}+\frac1k\sum_{p_n<k}m_nz_n^{-k}\right)z^k$.

Dim.: $G(z)+\int_0^z\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{w}{z_n}\right)^{p_n}\frac{m_n}{w-z_n}\,dw=\log F(z)$

$$\log F(z)=\log F(0)+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{D^{k-1}\left(\frac{F'}{F}(z)\right)_{z=0}}{k!}z^k$$

$$-\int_0^z\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{w}{z_n}\right)^{p_n}\frac{m_n}{w-z_n}\,dw=\int_0^z\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{p_n<k}(m_nz_n^{-k})\,w^{k-1}\,dw=$$

$$=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac1k\left(\sum_{p_n<k}m_nz_n^{-k}\right)z^k. \quad \square$$

$$F(z)=e^{G(z)}\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{z}{z_n}\right)\exp\left(\sum_{k=1}^{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)^k\right)$$

presi con molteplicità

Notazione: $f(z)\ll g(z)$ $(z\to+\infty)\iff f(z)=O(g(z))$.

Def.: data F intera si dice che ha ordine $\alpha\geq0$ se

(*) $F(z)\ll e^{|z|^{\alpha+\varepsilon}}$ $(z\to+\infty)$ $\forall\varepsilon>0$, ovvero se

$$\alpha=\inf\{A\geq0 \mid F(z)\ll e^{|z|^A}\}.$$

Es.: p pol. di grado $k\Rightarrow|p(z)|\leq|a_k||z|^k(1+o(1))\ll$
$\ll e^{|z|^\varepsilon}$ $\forall\varepsilon>0\Rightarrow p$ ha ordine 0.

$|e^{az+b}|=e^{\mathrm{Re}(az+b)}\ll e^{|z|^{1+\varepsilon}}$ $\forall\varepsilon>0$.

pol. di grado k: $|e^{p_k(z)}|=e^{\mathrm{Re}(p_k(z))}\leq e^{|p_k(z)|}\leq e^{|a_k||z|^k(1+o(1))}\ll e^{|z|^{k+\varepsilon}}$ $\forall\varepsilon>0$.

a_k, z t.c. $a_kz^k=\mathrm{Re}(a_kz^k)=|a_kz^k|$, cioè

$\arg(a_kz^k)=\arg(a_k)+k\arg(z)=0\Rightarrow\arg z=-\frac1k\arg(a_k)$.

$$|e^{p_k(z)}|=e^{\mathrm{Re}(p_k(z))}=e^{a_kz^k(1+o(1))}=e^{|a_k||z|^k(1+o(1))}\gg e^{|a_k||z|^k}$$

Oss.: se (*) non è vera per nessun α (oppure $F(z)\ll e^{|z|^A}$ è falsa $\forall A$) diciamo che ha ordine infinito.

Oss.: se F_1 e F_2 hanno ordine α_1 e α_2, allora F_1+F_2 e $F_1\cdot F_2$ hanno ordine $\leq\max\{\alpha_1,\alpha_2\}$. Dim.: ex..

Lemma: f olo. in $|z-z_0|\leq R$ e sia $0<r<R$ $(f\not\equiv0)$. Sia inoltre $N=\#\{z\in\mathbb{C}\mid|z-z_0|\leq r,\ f(z)=0\}$ (con molteplicità). Allora
$$|f(z_0)|\leq\left(\frac rR\right)^N\max_{|z-z_0|=R}|f(z)|.$$

Cor.: se $f(z_0)\neq0$ e valgono le ipotesi del lemma, allora
$$N\leq\frac{1}{\log(R/r)}\log\left(\frac{\max_{|z-z_0|=R}|f(z)|}{|f(z_0)|}\right).$$

Dim. (del lemma): sia $g(z)=f(z)\prod_{n=1}^N\frac{1-\bar z_nz}{z-z_n}$ $\quad(f(z_n)=0,\ |z_n|\leq r)$.

con molteplicità

WLOG $R=1$, $z_0=0$.

$|z|=1\Rightarrow z=e^{i\theta},\ \theta\in\mathbb{R}\Rightarrow\left|\frac{1-\bar z_ne^{i\theta}}{e^{i\theta}-z_n}\right|=|e^{i\theta}|\left|\frac{\bar z_n-e^{-i\theta}}{z_n-e^{i\theta}}\right|=1$.

Quindi $|g(z)|\leq\max_{|z|=1}|f(z)|$.

$$|f(w)|=|g(w)|\prod_{n=1}^N\left|\frac{w-z_n}{1-\bar z_nw}\right|\leq\max_{|z|=1}|f(z)|\prod_{n=1}^N\left|\frac{w-z_n}{1-\bar z_nw}\right|\Rightarrow$$

$$\Rightarrow|f(0)|\leq\max_{|z|=1}|f(z)|\prod_{n=1}^N|z_n|\leq r^N\max_{|z|=1}|f(z)|. \quad \square$$

Teorema: se F ha ordine $\alpha<+\infty$ e se $N(r)=\#\{z\in\mathbb{C}\mid F(z)=0,\ |z|\leq r\}$, allora $N(r)\ll_\varepsilon r^{\alpha+\varepsilon}$ $\forall\varepsilon>0$.

con molteplicità