Dim. (del teorema della lezione prima):

$$R=2r \Rightarrow \max_{|z|=R} |F(z)| \ll_\varepsilon e^{(2r)^{\alpha+\varepsilon}} \quad \forall \varepsilon>0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log \max_{|z|=R} |F(z)| \ll r^{\alpha+\varepsilon} \quad \forall \varepsilon>0.$$

Caso $F(0)\neq 0$: per il Cor., $N(r) \ll r^{\alpha+\varepsilon}$ $\forall \varepsilon>0$.

Se $F(0)=0$, considero $\tilde F(z) = F(z)/z^m$, m molteplicità di 0.

Per $|z|\leq 1$, $\tilde F \ll 1$. Per $|z|>1$, $\tilde F(z) = F(z)\frac{1}{z^m} \Rightarrow$

$\Rightarrow \operatorname{ord} \tilde F \leq \max\{\alpha, 0\} = \alpha$. $\square$

Def.: sia z_n (senza lim. finiti). Si dice esponente di convergenza di z_n il numero (se esiste) $\beta = \inf \left\{ B>0 \mid \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{|z_n|^B} < +\infty \right\}$, ovvero

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{|z_n|^{\beta+\varepsilon}} < +\infty \quad \forall \varepsilon>0.$$

Es.: $z_n = \log n$ non ha esponente di convergenza finito.

Teorema: Se $F(z)$ ($F(0)\neq 0$) ha ordine $\alpha>0$ e la successione dei suoi zeri z_n ha esponente di convergenza β, allora $\beta\leq\alpha$.

Dim.: se $\operatorname{ord}(F(z)) = \alpha<+\infty$, per il Teo. precedente $N(r) \ll_\varepsilon r^{\alpha+\varepsilon}$ $\forall\varepsilon>0$.

$r_n = |z_n|$, $F(z_n)=0 \Rightarrow n = N(r_n) \ll_\varepsilon r_n^{\alpha+\varepsilon} = |z_n|^{\alpha+\varepsilon}$ $\forall \varepsilon>0 \Rightarrow$

$\Rightarrow |z_n| \gg_\varepsilon n^{\frac{1}{\alpha+\varepsilon}}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |z_n|^{\overbrace{-(\alpha+2\varepsilon)}^{B}} \ll_\varepsilon \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-\frac{(\alpha+2\varepsilon)}{\alpha+\varepsilon}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{1+\delta(\varepsilon,\alpha)}} \overset{\delta(\varepsilon,\alpha)>0}{<} +\infty.$$

$$\beta = \inf\{B\} \leq \inf\{\alpha+2\varepsilon \mid \varepsilon>0\} = \alpha. \quad \square$$

Teorema: se $F(z)$ ($F(0)\neq 0$) ha ordine finito, la fattorizzazione di Weierstrass si scrive

$$F(z) = e^{G(z)} \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1-\frac{z}{z_n}\right) \exp\left(\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k}\left(\frac{z}{z_n}\right)^k \right) \quad \text{dove}$$

$\rightarrow E\left(\frac{z}{z_n}, p\right)$

$p\geq 0$ (indipendente da n) è t.c.

$$\sum_n |z_n|^{-(p+1)} < +\infty.$$

Dim. (traccia): $\sum_{n=1}^{+\infty} |m_n| \left|\frac{z}{z_n}\right|^{p_n+1} < +\infty \Longleftarrow \sum_{n=1}^{+\infty} |z_n|^{-(p+1)} < +\infty \ \forall z\in\mathbb{C}$.

Se $p+1 = B = \alpha+\varepsilon \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} |z_n|^{-B} < +\infty$. $\square$

Oss.: β esponente di convergenza di z_n ($\beta\leq\alpha$). Il p migliore è:

1) β non intero $\Rightarrow p = \lfloor\beta\rfloor$

2) β intero $\Rightarrow p = \begin{cases} \beta-1 & \text{se } \beta = \min\{B\} \\ \beta & \text{se } \nexists \min\{B\} \end{cases}$

Abbiamo $\beta-1\leq p\leq \beta\leq\alpha$.

Teorema (Borel-Carathéodory): Sia $0<r<R$ e sia f olo. in $|z-z_0|\leq R$ ($z_0\in\mathbb{C}$). $\max_{|z-z_0|=r} |f(z)| \leq \frac{2r}{R-r} \max_{|z-z_0|=R} \operatorname{Re} f(z) + \frac{R+r}{R-r}|f(z_0)|$.

Se inoltre $\max_{|z-z_0|=R} \operatorname{Re} f(z) \geq 0$, allora

$$\max_{|z-z_0|=r} |f^{(m)}(z)| \leq \frac{m!\,2^{m+2}R}{(R-r)^{m+1}} \left(\max_{|z-z_0|=R} \operatorname{Re} f(z) + |f(z_0)| \right).$$

Dim.: WLOG $z_0=0$. Se f è costante è banale. f non costante. Supponiamo $f(0)=0$.

Sia $A = \max_{|z|=R} \operatorname{Re} f(z) > 0$. Infatti $|e^{f(z)}| = e^{\operatorname{Re} f(z)}$ e uso il principio del massimo modulo su $e^{f(z)}$. Sia $\varphi(z) = \frac{f(z)}{2A-f(z)}$ olo. in $|z|\leq R$ ($\operatorname{Re}(2A-f(z)) = 2A - \operatorname{Re} f(z) \geq A>0$).

Posto $f(z) = u+iv$, allora

$$|\varphi(z)|^2 = \frac{u^2+v^2}{(2A-u)^2+v^2} \leq 1 \text{ in } |z|\leq R. \text{ Infatti, } u\leq A \Rightarrow$$

$\Rightarrow 2u\leq 2A \Rightarrow u\leq 2A-u$, $-2A+u\leq u \Rightarrow u^2\leq (2A-u)^2$.

$\varphi(0)=0 \Rightarrow \frac{\varphi(z)}{z}$ è olo. in $|z|\leq R$ e $\left|\frac{\varphi(z)}{z}\right| \leq \max_{|z|=R} \left|\frac{\varphi(z)}{z}\right| \leq \frac{1}{R} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \max_{|z|=r} |\varphi(z)| \leq \frac{r}{R} \Rightarrow |f(z)| = \frac{2A|\varphi(z)|}{|1+\varphi(z)|} \leq \frac{2Ar/R}{1-|\varphi(z)|} \leq$$

$$\leq \frac{2Ar}{R-r} \quad \text{per } |z|=r.$$

Se $f(0)\neq 0$, ripetiamo il ragionamento con $f(z)-f(0) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \max_{|z|=r} |f(z)-f(0)| \leq \frac{2r}{R-r} \max_{|z|=R} \operatorname{Re}(f(z)-f(0)) \leq \frac{2r}{R-r} \max_{|z|=R} \operatorname{Re} f(z) + \frac{2r}{R-r}|f(0)|$$

$$\rotatebox{90}{$\leq$}$$

$$\max_{|z|=r} |f(z)| - |f(0)|.$$

Osserviamo che se $A\geq 0$ si ha $\max_{|z|=r} |f(z)| \leq \frac{R+r}{R-r}\left(\max_{|z|=R} \operatorname{Re} f(z) + |f(z_0)| \right)$.

$|z|\leq r$, $f^{(m)}(z) = \frac{m!}{2\pi i} \oint_{|w-z|=\frac{R-r}{2}} \frac{f(w)}{(w-z)^{m+1}}\,dw \qquad |w|\leq \frac{R-r}{2} + r = \frac{R+r}{2} < R.$

$$|f(w)| \leq \max_{|w|=\frac{R+r}{2}} |f(w)| \leq \frac{R+\frac{R+r}{2}}{R-\frac{R+r}{2}} \left(\max_{|w|=R} \operatorname{Re} f(w) + |f(0)| \right) \leq$$

$$\leq \frac{4R}{R-r} \left(\max_{|w|=R} \operatorname{Re} f(w) + |f(0)| \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f^{(m)}(z)| \leq \frac{m!}{2\pi} \frac{4R}{R-r} \frac{2\pi}{\left(\frac{R-r}{2}\right)^m} \left(\max_{|w|=R} \operatorname{Re} f(w) + |f(0)| \right). \quad \square$$

Teorema (Hadamard): se F è intera di ordine $\alpha<+\infty$ ($F(0)\neq 0$), allora G è un polinomio di grado $\leq\alpha$.

Teorema: z_n con esp. di conv. $\beta<+\infty$ e p il minimo intero t.c. $\sum_{n=1}^{+\infty} |z_n|^{-(p+1)} < +\infty$. Allora il prodotto di Weierstrass (canonico)

$$\prod_{n=1}^{+\infty} \left(1-\frac{z}{z_n}\right) \exp\left(\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k}\left(\frac{z}{z_n}\right)^k \right)$$ è uniformemente convergente (già visto), quindi è una funzione intera. È di ordine finito $=\beta$.

Cor.: se $F(z) = e^{G(z)} \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1-\frac{z}{z_n}\right) \exp\left(\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k}\left(\frac{z}{z_n}\right)^k \right)$ ha ordine α e z_n ha esp. di conv. β e se G è pol. di grado q, allora $\alpha = \max\{q,\beta\}$.

Dim. (del Cor.): $e^{G(z)}$ ha ordine q e il resto ha, per il Teo., ordine β.

Ordine prodotto $\leq$ max ordini $\Rightarrow \alpha\leq\max\{q,\beta\}$, ma $\alpha\geq\beta$ e per Hadamard $\alpha\geq q$. $\square$