$$\frac{1}{\phi(q)}\sum_{\chi \bmod q}\overline{\chi}(a)\log L(s,\chi)=\sum_{p\equiv a\,(q)}\frac{1}{p^s}+O(1) \quad (\star)$$

uso formula di ortogonalità

$$L(s,\chi_0)=\zeta(s)\prod_{p\mid q}\left(1-\frac{1}{p^s}\right),$$

$s\in\mathbb{R}$, $\log L(s,\chi_0)\xrightarrow{s\to1^+}+\infty$.

Se $\chi\neq\chi_0 \Rightarrow L(1,\chi)\neq0$, si ottiene $\log L(s,\chi)\overset{s\to1^+}{=}O(1)$.

Allora $(\star)\to+\infty \Rightarrow$ teorema di Dirichlet.

Se χ è complesso, $L(1,\chi)\neq0$. Se fosse 0, anche $L(1,\overline{\chi})=0$.

Prendendo $a=1$ in $(\star)$, $s\in\mathbb{R}, s>1$, troveremmo

$$\sum_{\chi \bmod q}\log\underbrace{|L(s,\chi)|}_{\text{indifferente}}=\phi(q)\sum_{p^m\equiv1\,(q)}\frac{1}{mp^{ms}}\in\mathbb{R}^+\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\prod_{\chi \bmod q}|L(s,\chi)|\geq1,$$ assurdo perché ci sarebbero un polo semplice e due zeri.

Se $\chi\neq\chi_0$ é reale e per assurdo $L(s,\chi)=0$, sia

$$F(s)=\frac{L(s,\chi)L(s,\chi_0)}{L(2s,\chi_0)},$$ regolare per $\sigma\geq\frac12$.

$$\lim_{s\to1/2^+}F(s)=0.\quad F(s)=\prod_p\frac{\left(1-\frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1}\left(1-\frac{\chi_0(p)}{p^s}\right)^{-1}}{\left(1-\frac{\chi_0(p)}{p^{2s}}\right)^{-1}}=$$

$$=\prod_{p\nmid q}\frac{\left(1-\frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}}{\left(1-\frac{1}{p^{2s}}\right)^{-1}}.$$ Se $\chi(p)=-1$, il fattore è 1. Allora ho

$$\prod_{\chi(p)=1}\frac{(1-1/p^s)^{-1}(1-1/p^s)^{-1}}{(1-1/p^{2s})^{-1}}=\prod_{\chi(p)=1}\frac{p^s+1}{p^s-1}\overset{\sigma>1}{=}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{n^s},\quad a_1=1,\ a_n\geq0.$$

La serie di Taylor centrata in $s=2$ ha raggio almeno $3/2$.

$$F(s)=\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{b_m}{m!}(s-2)^m \text{ dove } b_m=(-1)^m\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n(\log n)^m}{n^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow F(s)=\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{1}{m!}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n(\log n)^m}{n^2}(2-s)^m.$$ Per $s<2$ é tutto positivo $\Rightarrow$

$\Rightarrow F(s)\geq1$ per $\sigma\geq1/2$, assurdo.

Davenport, cap. 7: $\displaystyle\sum_{\substack{p\equiv a(q),\\ p\leq x}}\frac1p=\frac{1}{\phi(q)}\log\log x+O_q(1)$.

Serve mostrare che $\sum_p\frac{\chi(p)}{p}$ converge per $\chi\neq\chi_0$.

Mertens lo mostrò per $\sum_n\frac{\chi(n)\log n}{n}$ usando che $\Lambda*1=L$.

Vedi i dettagli sul Davenport.

Caratteri primitivi (mod q)

Es.: $q=6$. $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^*=\{1,5\}$

1	0	0	0	-1	0
1	2	3	4	5	6
1	-1	0	1	-1	0

$q_1=3$

$(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^*=\{1,2\}$

Def.: $\chi \bmod q$ si dice non primitivo se $\exists\, q_1|q$ e $\chi_1 \bmod q_1$ t.c. $\chi(n)=\begin{cases}\chi_1(n) & \text{se } (n,q)=1\\ 0 & \text{se } (n,q)>1\end{cases}$. Si dice primitivo altrimenti.

Nel primo caso, se q_1 è il minimo divisore di q t.c. quella proprietà vale, q_1 si dice conduttore di $\chi \bmod q$ e si dice che χ_1 induce χ.

Se $(n,q)>1$ ma $(n,q_1)=1$, prendo r t.c. $(n+rq_1,q)=1$ e pongo $\chi_1(n)=\chi(n+rq_1)$. Si veda l'esempio.

Oss.: se $\chi \bmod q$ é indotto da $\chi_1 \bmod q_1$ con $q_1|q$, si ha

$$L(s,\chi)\underset{\sigma>1}{=}\prod_{p\nmid q}\left(1-\frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1}=\prod_{p\nmid q}\left(1-\frac{\chi_1(p)}{p^s}\right)^{-1}=\prod_p\left(1-\frac{\chi_1(p)}{p^s}\right)^{-1}\prod_{p|q}\left(1-\frac{\chi_1(p)}{p^s}\right)=$$

$$=L(s,\chi_1)\underbrace{\prod_{p|q}\left(1-\frac{\chi_1(p)}{p^s}\right)}_{\text{infiniti zeri che non danno problemi}}.$$

Somme di Gauss

Def.: sia $\chi \bmod q$ un carattere. Si definisce somma di Gauss relativa a χ

$$\tau(\chi)=\sum_{n=1}^{q}\chi(n)e^{\frac{2\pi in}{q}}.$$

Oss.: $$\chi(n)\tau(\overline{\chi})\underset{(n,q)=1}{=}\sum_{m=1}^{q}\chi(n)\overline{\chi}(m)e^{\frac{2\pi im}{q}}\overset{(\star)}{=}\sum_{h=1}^{q}\overline{\chi}(h)e^{\frac{2\pi inh}{q}}.$$

$mn^{-1}=h$ in $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}\Rightarrow m\equiv nh\ (q)\Rightarrow$
$\Rightarrow\chi(n)\overline{\chi}(m)=\chi(n)\overline{\chi}(nh)=$
$=\chi(n)\overline{\chi}(n)\overline{\chi}(h)=\overline{\chi}(h)$

Prop.: se $\chi \bmod q$ é primitivo, si ha: $(\star)$ vale anche se $(n,q)>1$ e inoltre $\tau(\overline{\chi})\neq0$.

Dim.: vediamo solo $\tau(\overline{\chi})\neq0$ usando la prima parte della tesi.

$$\chi(n)\tau(\overline{\chi})=\sum_{h=1}^{q}\overline{\chi}(h)e^{\frac{2\pi inh}{q}},$$ faccio il prodotto $\Rightarrow$

$$\overline{\chi}(n)\overline{\tau(\overline{\chi})}=\sum_{h=1}^{q}\chi(h)e^{-\frac{2\pi inh}{q}}$$

$$\Rightarrow|\chi(n)|^2|\tau(\overline{\chi})|^2=\sum_{h_1,h_2=1}^{q}\overline{\chi}(h_1)\chi(h_2)e^{\frac{2\pi in(h_1-h_2)}{q}}$$

$$\sum_{n=1}^{q}|\chi(n)|^2|\tau(\overline{\chi})|^2=\sum_{n=1}^{q}\sum_{h_1,h_2=1}^{q}(\dots)\underset{\text{scambio somme}}{=}\sum_{h=1}^{q}\sum_{n=1}^{q}|\chi(h)|^2=q\,\phi(q)$$

$$\overset{\|}{|\tau(\overline{\chi})|^2\phi(q)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow|\tau(\overline{\chi})|=\sqrt{q}.\quad\square$$

Si ottiene $$\chi(n)=\frac{1}{\tau(\overline{\chi})}\sum_{m=1}^{q}\overline{\chi}(m)e^{\frac{2\pi imn}{q}}.$$

Oss.: si può dimostrare che se $\chi_1 \bmod q_1$ induce $\chi \bmod q$, allora $\tau(\chi)=\tau(\chi_1)\mu\left(\frac{q}{q_1}\right)\chi_1\left(\frac{q}{q_1}\right)$.

Ricordiamo che $\vartheta(z)=\frac{1}{\sqrt{z}}\vartheta\left(\frac1z\right)$ per $\mathrm{Re}\,z>0$, dove $\vartheta(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}e^{-n^2\pi z}$.

Prop.: $$\sum_{n\in\mathbb{Z}}e^{-\pi n^2z-2\pi i\alpha n}=\frac{1}{\sqrt{z}}\sum_{n\in\mathbb{Z}}e^{\frac{-\pi(n+\alpha)^2}{z}}$$ dove $\alpha\in\mathbb{R}$ fissato. Caso $\alpha=0$ visto (vedi sopra).

Dim.: $f(\xi)=e^{-\pi\xi^2-2\pi i\alpha\xi/\sqrt{x}}$

$$\hat{f}(\xi)=\int_{\mathbb{R}}e^{-\pi t^2-2\pi i\alpha t/\sqrt{x}-2\pi i\xi t}dt$$

$$\hat{f}'(\xi)=-2\pi i\int_{\mathbb{R}}t\,e^{-\pi t^2-2\pi i\alpha t/\sqrt{x}-2\pi i\xi t}dt=$$

$$=i\int_{\mathbb{R}}e^{-2\pi i\alpha t/\sqrt{x}-2\pi i\xi t}d\left(e^{-\pi t^2}\right)\overset{\text{per parti}}{=}$$

$$=-2\pi\left(\xi+\frac{\alpha}{\sqrt{x}}\right)\int_{\mathbb{R}}e^{-2\pi i\alpha t/\sqrt{x}-2\pi i\xi t-\pi t^2}dt=$$

$$=-2\pi\left(\xi+\frac{\alpha}{\sqrt{x}}\right)\hat{f}(\xi).$$

$$u'(\xi)=-2\pi\left(\xi+\frac{\alpha}{\sqrt{x}}\right)u(\xi)\Rightarrow u(\xi)=C\,e^{-\pi\left(\xi+\frac{\alpha}{\sqrt{x}}\right)^2}.$$

$$\xi=-\frac{\alpha}{\sqrt{x}}\Rightarrow u(\xi)=C, \text{ ma } \hat{f}\left(-\frac{\alpha}{\sqrt{x}}\right)=\int_{\mathbb{R}}e^{-\pi t^2}dt=1\Rightarrow C=1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\hat{f}(\xi)=e^{-\pi\left(\xi+\frac{\alpha}{\sqrt{x}}\right)^2}$$

$$f_x(\xi)=f(\sqrt{x}\,\xi)=e^{-\pi\xi^2x-2\pi i\alpha\xi}.$$

$$\hat{f}_x(\xi)=\int_{\mathbb{R}}f(\sqrt{x}\,t)e^{-2\pi it\xi}dt\underset{\sqrt{x}t=y}{=}\frac{1}{\sqrt{x}}\int_{\mathbb{R}}f(y)e^{-2\pi i\frac{y}{\sqrt{x}}\xi}dy=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x}}\hat{f}\left(\frac{\xi}{\sqrt{x}}\right)\Rightarrow\hat{f}_x(\xi)=\frac{1}{\sqrt{x}}e^{-\pi(\xi+\alpha)^2/x}.$$ Formula di Poisson $\Rightarrow$ tesi. $\square$