

Definiamo, dato un polinomio $f \in R[x]$ con R un anello qualunque, il suo *contenuto* $c(f)$.

Definizione 0.1. Sia R un qualunque anello, e sia $f = \sum_{i=0}^k f_i x^i \in R[x]$ un polinomio a coefficienti in R . Allora il contenuto di f , che denotiamo con $c(f)$, è l'ideale $c(f) = (f_0, \dots, f_k) \subseteq R$.

Mostriamo ora un importante risultato, il Lemma di Dedekind-Mertens, che generalizza il noto Lemma di Gauss ad anelli non necessariamente UFD.

Lemma 0.2. Sia R un qualunque anello, e siano $f, g \in R[x]$ due polinomi tali che $\deg(f) = n, \deg(g) = m$. Allora $c(f)^{m+1}c(g) = c(f)^m c(fg)$.

Proof. Poniamo $f = \sum_{i=0}^n f_i x^i$, e analogamente $g = \sum_{i=0}^m g_i x^i$. Denotiamo con $fg[i]$ il coefficiente di grado i -esimo del polinomio fg . Si osserva allora immediatamente che

$$\begin{aligned} c(fg) &= (\{fg[k], 0 \leq k \leq mn\}) \\ &= \left(\left\{ \sum_{i+j=k} f_i g_j, 0 \leq k \leq mn \right\} \right) \\ &\subseteq (\{f_i g_j, 0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq m\}) \\ &= (f_0, \dots, f_n)(g_0, \dots, g_m) \\ &= c(f)c(g) \end{aligned}$$

Ne segue che

$$c(f)^m c(fg) \subseteq c(f)^m c(f)c(g) = c(f)^{m+1}c(g)$$

Mostriamo ora il contenimento opposto (e quindi l'eguaglianza) procedendo per induzione su m .

Caso base Se $m = 0$ si ha $g = g_0, c(g) = (g_0)$. Segue che $fg = \sum_{i=0}^n g_0 f_i x^i$ e di conseguenza

$$c(fg) = (g_0 f_0, \dots, g_0 f_n) = (g_0)(f_0, \dots, f_n) = c(g)c(f)$$

Allora

$$c(f)^m c(fg) = c(f)^m c(f)c(g) = c(f)^{m+1}c(g)$$

come voluto.

Passo induttivo Poniamo

$$g' := g - g[m]$$

Si noti come allora

$$c(g) = (g_0, \dots, g_{m-1}, g_m) = c(g') + (g_m)$$

Per convenzione si pone $f_j = 0$ per $j < 0$ o $j > n$. Si ha con questa notazione che $\forall k$

$$(fg)[k] = \sum_{0 \leq i \leq m} f_{k-i}g_i = f_{k-m}g_m + \sum_{0 \leq i \leq m-1} f_{k-i}g_i$$

e quindi

$$\sum_{0 \leq i \leq m-1} f_{k-i}g_i = (fg)[k] - f_{k-m}g_m \in c(fg) + (g_m)c(f)$$

Per ipotesi induttiva si ha allora

$$\begin{aligned} c(f)^m c(g') &= c(f)^{m-1} c(fg') \\ &= c(f)^{m-1} \left(\left\{ \sum_{0 \leq i \leq m-1} f_{k-i}g_i, \ 0 \leq k \leq n(m-1) \right\} \right) \\ &\subseteq c(f)^{m-1} (c(fg) + (g_m)c(f)) \\ &= c(f)^{m-1} c(fg) + (g_m)c(f)^m \end{aligned}$$

dove per il contenimento finale si è usato quanto osservato appena sopra. Ne segue, moltiplicando ambo i lati del contenimento trovato per (f_j) , che $\forall j$

$$(f_j)c(f)^m c(g') \subseteq c(f)^m c(fg) + (f_j g_m)c(f)^m$$

Si prosegue osservando che inoltre si ha $\forall j$

$$fg[m+j] = f_j g_m + \sum_{0 \leq i \leq m-1} f_{m+j-i}g_i \implies f_j g_m \in c(fg) + (f_{j+1}, f_{j+2}, \dots)c(g') \quad \forall j$$

dove l'implicazione segue dal fatto che $m+j-1 > j \quad \forall 0 \leq i \leq m-1$. Ne segue che

$$(f_j)c(f)^m c(g') \subseteq c(f)^m c(fg) + (f_{j+1}, f_{j+2}, \dots)c(f)^m c(g') \quad \forall j$$

Mostriamo ora per induzione forte su k che

$$(f_{n-k})c(f)^m c(g') \subseteq c(f)^m c(fg) \quad \forall k > 0$$

Caso base Per $k = 0$ si ha

$$\begin{aligned} (f_n)c(f)^m c(g') &\subseteq c(f)^m c(fg) + (f_{n+1}, f_{n+2}, \dots)c(f)^m c(g') \\ &= c(f)^m c(fg) + (0)c(f)^m c(g') = c(f)^m c(fg) \quad \forall j \end{aligned}$$

come voluto.

Passo induttivo Si ha, per ipotesi induttiva

$$(f_j)c(f)^m c(g') \subseteq c(f)^m c(fg) \quad \forall j > n-k-1$$

e quindi

$$(f_{n-k-1})c(f)^m c(g) \subseteq c(f)^m c(fg) + (f_{n-k}, f_{n-k+1}, \dots)c(f)^m c(g') \subseteq c(f)^m c(fg)$$

come voluto.

Quanto appena mostrato implica allora

$$(f_0, \dots, f_n)c(f)^m c(g') = c(f)^{m+1} c(g') \subseteq c(f)^m c(fg)$$

Inoltre, dato che per quanto visto prima

$$f_j g_m \in c(fg) + (f_{j+1}, f_{j+2}, \dots)c(g') \quad \forall j$$

si ha

$$c(f)(g_m) \subseteq c(fg) + c(f)c(g')$$

Mettendo questi ultimi due fatti insieme si ha allora

$$\begin{aligned} c(f)^{m+1} c(g) &= c(f)^{m+1} c(g') + c(f)^m c(f)(g_m) \\ &\subseteq c(f)^m c(fg) + c(f)^m c(f)c(g') \\ &= c(f)^m c(fg) + c(f)^{m+1} c(g') \\ &\subseteq c(f)^m c(fg) \end{aligned}$$

Questo finalmente conclude. □

Lemma 0.3. *Sia $(R, \mathfrak{m})$ anello locale artiniano. Allora $D(R[x]) = \mathfrak{m}[x]$.*

Proof. Innanzitutto si osserva subito che

$$\mathfrak{m}[x] = \mathcal{N}(R)[x] = \mathcal{N}(R[x]) \subseteq D(R[x])$$

Mostriamo ora l'inclusione opposta. Procediamo per assurdo, supponendo che esista un polinomio $f = \sum_{n=0}^d f_n x^n \in D(R[x])$, $f \notin \mathfrak{m}[x]$. Essendo

$$\mathfrak{m}[x] = \left\{ \sum_{i=0}^d m_i x^i, m_i \in \mathfrak{m}, d \in \mathbb{N} \right\}$$

esiste allora k tale che $f_k \notin \mathfrak{m}$. Allora $f_k \in c(f)$, e $c(f) = (1)$ essendo $f_k \notin \mathfrak{m}$ e quindi invertibile. Dato che $f \in D(R[x])$ si ha che $\exists g = \sum_{i=0}^l g_i x^i \neq 0$ con $fg = 0$. Per Dedekind-Mertens si avrebbe allora che

$$\begin{aligned} c(f)^{\deg(g)+1} c(g) &= (1)^{\deg(g)+1} c(g) = c(g) \\ &= c(f)^{\deg(g)} c(fg) = c(f)^{\deg(g)} c(0) = 0 \\ &\iff c(g) = (g_1, \dots, g_l) = 0 \iff g = 0 \end{aligned}$$

Avendo supposto $g \neq 0$ abbiamo quindi l'assurdo cercato. □