

Lemma 1 (Lemma di Alexander). *Sia X uno spazio topologico e sia $\mathcal{D}$ una prebase della topologia di X . Allora X è compatto se e solo se ogni ricoprimento di X formato da elementi di $\mathcal{D}$ ammette un sottoricoprimento finito.*

Proof. L'implicazione diretta è ovvia.

Supponiamo ora che ogni ricoprimento di X formato da elementi di $\mathcal{D}$ ammetta un sottoricoprimento finito, e supponiamo per assurdo che X non sia compatto.

Sia $\mathcal{F}$ la famiglia di tutti i ricoprimenti aperti di X che non ammettono sottoricoprimento finito, ordinata per inclusione. Tale famiglia è non vuota per ipotesi.

Mostriamo che ogni catena $\{\mathcal{U}_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{F}$ ammette un maggiorante. Infatti $\mathcal{U} := \bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i$ è ancora un ricoprimento di X . Se ammettesse un sottoricoprimento finito, esso sarebbe contenuto in un qualche $\mathcal{U}_k$ (poiché le $\mathcal{U}_i$ formano una catena), in contraddizione con $\mathcal{U}_k \in \mathcal{F}$. Dunque $\mathcal{U} \in \mathcal{F}$ ed è un maggiorante della catena.

Per il lemma di Zorn, $\mathcal{F}$ ammette un elemento massimale, che denotiamo con $\mathcal{U}$.

Poniamo

$$\mathcal{W} := \mathcal{U} \cap \mathcal{D}.$$

Osserviamo che $\mathcal{W}$ non è un ricoprimento di X , altrimenti, per ipotesi su X , ammetterebbe un sottoricoprimento finito, che sarebbe anche un sottoricoprimento finito di $\mathcal{U}$, assurdo. Esiste quindi $x \in X \setminus \bigcup \mathcal{W}$.

Poiché $\mathcal{U}$ è un ricoprimento, esiste $V \in \mathcal{U}$ tale che $x \in V$. Essendo $\mathcal{D}$ una prebase, esistono $D_1, \dots, D_n \in \mathcal{D}$ tali che

$$x \in D_1 \cap \dots \cap D_n \subseteq V.$$

Dato che $x \notin \bigcup \mathcal{W}$, nessuno dei D_i appartiene a $\mathcal{U}$.

Per la massimalità di $\mathcal{U}$, per ogni i la famiglia $\mathcal{U} \cup \{D_i\}$ ammette un sottoricoprimento finito R_i . Consideriamo allora la famiglia finita

$$\mathcal{V} := \{V\} \cup \bigcup_{i=1}^n (R_i \setminus \{D_i\}),$$

che è contenuta in $\mathcal{U}$.

Mostriamo che $\mathcal{V}$ è un ricoprimento di X . Sia $y \in X$ arbitrario. Se $y \in V$, allora y è coperto. Se invece $y \notin V$, allora in particolare $y \notin D_1 \cap \dots \cap D_n$, e quindi esiste i tale che $y \notin D_i$. Poiché R_i ricopre X e $y \notin D_i$, il punto y deve appartenere a qualche elemento di $R_i \setminus \{D_i\}$, e dunque è coperto da $\mathcal{V}$.

Ne segue che $\mathcal{V}$ è un sottoricoprimento finito di $\mathcal{U}$, in contraddizione con la definizione di $\mathcal{U}$. Questa contraddizione mostra che X è compatto. $\square$

Dimostrazione di Tychonoff

Sia $\{X_i\}_{i \in I}$ una famiglia di spazi topologici compatti e sia $X := \prod_{i \in I} X_i$ il loro prodotto topologico. Consideriamo la *prebase canonica* della topologia prodotto

$$\mathcal{D} := \left\{ \pi_i^{-1}(A_i) \mid i \in I, A_i \subseteq X_i \text{ aperto} \right\},$$

dove $\pi_i : X \rightarrow X_i$ è la proiezione sull' i -esima coordinata.

Per il lemma di Alexander, è sufficiente verificare che ogni ricoprimento di X composto da elementi della prebase $\mathcal{D}$ ammette un sottoricoprimento finito.

Sia dunque

$$\mathcal{U} \subseteq \mathcal{D}$$

un ricoprimento di X formato da elementi della prebase canonica. Per ogni $i \in I$, definiamo

$$\mathcal{U}_i := \{U \in \mathcal{U} \mid U = \pi_i^{-1}(A_i) \text{ per qualche aperto } A_i \subseteq X_i\}.$$

Osservazione chiave. Esiste almeno un indice $i_0 \in I$ tale che $\mathcal{U}_{i_0}$ sia un ricoprimento di X .

Dimostrazione per assurdo. Supponiamo che per ogni $i \in I$, $\mathcal{U}_i$ non sia un ricoprimento di X . Allora per ogni $i \in I$ esiste un punto $x_i \in X_i$ tale che

$$x_i \notin \bigcup \{A_i \subseteq X_i \mid \pi_i^{-1}(A_i) \in \mathcal{U}_i\}.$$

Costruiamo il punto

$$y := (x_i)_{i \in I} \in X.$$

Per costruzione, per ogni $U \in \mathcal{U}$, se $U = \pi_i^{-1}(A_i)$ per qualche i , allora $y_i = x_i \notin A_i$, dunque $y \notin U$.

Ma ciò contraddice il fatto che $\mathcal{U}$ sia un ricoprimento di X . Quindi l'ipotesi per assurdo è falsa e deve esistere almeno un indice $i_0 \in I$ tale che $\mathcal{U}_{i_0}$ copre l'intero spazio X .

Dall'osservazione precedente, esiste un indice $i_0 \in I$ tale che

$$\mathcal{U}_{i_0} = \{\pi_{i_0}^{-1}(A_{i_0}) \in \mathcal{U}\}$$

è un ricoprimento dell'intero spazio prodotto X .

Consideriamo ora l'insieme delle proiezioni sull' i_0 -esima coordinata:

$$\{A_{i_0} \subseteq X_{i_0} \mid \pi_{i_0}^{-1}(A_{i_0}) \in \mathcal{U}_{i_0}\}.$$

Poiché X_{i_0} è compatto, questo ricoprimento di X_{i_0} ammette un sottoricoprimento finito

$$\{A_{i_0}^{(1)}, \dots, A_{i_0}^{(n)}\}.$$

Risolleva ciascun aperto tramite la proiezione:

$$\pi_{i_0}^{-1}(A_{i_0}^{(1)}), \dots, \pi_{i_0}^{-1}(A_{i_0}^{(n)}) \in \mathcal{U}_{i_0} \subseteq \mathcal{U}.$$

Allora

$$\{\pi_{i_0}^{-1}(A_{i_0}^{(1)}), \dots, \pi_{i_0}^{-1}(A_{i_0}^{(n)})\}$$

è un sottoricoprimento finito di $\mathcal{U}$ che copre X , come richiesto.

Da quanto precede, ogni ricoprimento di X formato da elementi della prebase canonica ammette un sottoricoprimento finito. Per il lemma di Alexander, X è quindi compatto. □

□